

Lisans Yerleřtirme Sınavı – 1 (Lys – 1) / 16 Haziran 2012

Matematik Sorularının Çözümleri

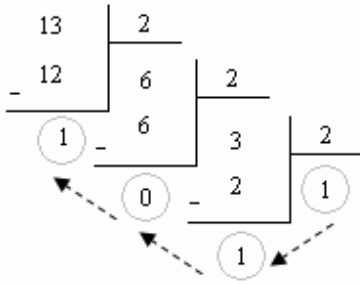
1. 8 sayı tabanında verilen $(15)_8$ sayısının 2 sayı tabanında yazılışı = ?

Bu durumda $(15)_8$ sayısı önce 10 tabanına çevrilir. Sonra 2 tabanında yazılır.

$$(15)_8 = 1 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0$$

$$= 8 + 5$$

$$= 13$$



Buna göre

$$(15)_8 = (1101)_2 \text{ elde edilir.}$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{16^3}{24^3 + 16^3 + 8^3} &= \frac{(2 \cdot 8)^3}{(3 \cdot 8)^3 + (2 \cdot 8)^3 + 8^3} \\ &= \frac{2^3 \cdot 8^3}{3^3 \cdot 8^3 + 2^3 \cdot 8^3 + 8^3} \\ &= \frac{2^3 \cdot 8^3}{8^3 \cdot (3^3 + 2^3 + 1)} \\ &= \frac{2^3}{(3^3 + 2^3 + 1)} \\ &= \frac{8}{27 + 8 + 1} \\ &= \frac{8}{36} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$3. \frac{3^x}{2^{2x}} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^{\frac{1}{x}} = ?$$

$$\frac{3^x}{2^{2x}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{3^x}{4^x} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{1}{5}$$

Eşitliğin her iki tarafının $\frac{1}{x}$ inci kuvveti alınırsa,

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{3}{4}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} = (5)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow 5^{\frac{1}{x}} = \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

4. $x = \sqrt[4]{5}$ olduğuna göre, $(x^2 - 2)^{-1} = ?$

$$(x^2 - 2)^{-1} = \frac{1}{x^2 - 2}$$

$$x = \sqrt[4]{5} \Rightarrow x = 5^{\frac{1}{4}}$$

Eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa

$$\Rightarrow x^2 = \left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x^2 = \sqrt{5}$$

denklemden yerine yazılırsa

$\frac{1}{x^2 - 2} = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$ olur. Eşleniği ile çarpıp bölersek,

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \cdot \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 2}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4}$$

$$= \sqrt{5} + 2 \text{ bulunur.}$$

5. $\frac{x.(y+z) + z.(y-x)}{x^2 + x.y + x.z + y.z} = \frac{x.y + x.z + z.y - z.x}{x.(x+y) + z.(x+y)}$

$$= \frac{y.(x+z)}{(x+y).(x+z)}$$

$$= \frac{y}{x+y}$$

6. x ve y pozitif gerçel sayıları için

$$x \cdot y = 5$$

$$x^2 + y^2 = 15 \text{ ise}$$

$$x^3 + y^3 = ?$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3$$

$(x + y)^3 = x^3 + 3 \cdot x \cdot y \cdot (x + y) + y^3$ özdeşliğinden $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3 \cdot x \cdot y \cdot (x + y)$ bulunur.

Buradan

$$(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 \quad \Rightarrow \quad (x + y)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \quad x + y = \pm 5$$

x ve y pozitif gerçel sayıları olduğundan, $x + y = 5$ olur.

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3 \cdot x \cdot y \cdot (x + y)$$

$$x^3 + y^3 = 5^3 - 3 \cdot 5 \cdot 5$$

$$x^3 + y^3 = 50 \text{ elde edilir.}$$

7. x ve y birer gerçel sayı olmak üzere,

$$x^2 - 4y = -7$$

$$y^2 - 2x = 2 \text{ ise}$$

$$x + y = ?$$

$$x^2 - 4y + 7 = 0$$

$$y^2 - 2x - 2 = 0 \quad \text{Eşitlikler taraf tarafa toplanır}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 1 \text{ ve } y = 2$$

Buna göre

$$x + y = 1 + 2 = 3 \text{ olur.}$$

8. x bir gerçel sayı olmak üzere

$$(\sqrt{7} + \sqrt{3})^x = 4 \Rightarrow (\sqrt{7} - \sqrt{3})^x = ?$$

$$(\sqrt{7} - \sqrt{3})^x = a \text{ olsun.}$$

$$(\sqrt{7} + \sqrt{3})^x = 4 \quad \text{Eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa}$$

$$(\sqrt{7} - \sqrt{3})^x \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})^x = a \cdot 4 \Rightarrow [(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})]^x = a \cdot 4$$

$$\Rightarrow [(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2]^x = a \cdot 4$$

$$\Rightarrow [7 - 3]^x = a \cdot 4$$

$$\Rightarrow 4^x = a \cdot 4$$

$$\Rightarrow \frac{4^x}{4} = a$$

$$\Rightarrow a = 4^{x-1}$$

Dolayısıyla

$$(\sqrt{7} - \sqrt{3})^x = a = 4^{x-1} \text{ olur.}$$

9. Birler basamağında A rakamı bulunan iki basamaklı tüm doğal sayıların toplamı 504 olduğuna göre, A = ?

$$1A + 2A + 3A + 4A + 5A + 6A + 7A + 8A + 9A = 504$$

$$(1.10 + A) + (2.10 + A) + (3.10 + A) + \dots + (9.10 + A) = 504$$

$$[10.(1 + 2 + 3 + \dots + 9)] + 9A = 504$$

$$10 \cdot \left(\frac{9 \cdot (9 + 1)}{2} \right) + 9A = 504$$

$$9A = 54$$

A = 6 elde edilir.

10.

$$2^a \cdot 3^b \equiv 0 \pmod{12}$$

$$2^b \cdot 3^a \equiv 0 \pmod{27}$$

denkliklerinin her ikisini de aynı anda sağlayan a ve b pozitif tam sayıları için $a + b$ toplamı en az kaçtır?

$$2^a \cdot 3^b \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow 2^a \cdot 3^b = 12 \cdot k$$

$k = 1$ ise

$$2^a \cdot 3^b = 2^2 \cdot 3^1 \Rightarrow a = 2 \text{ ve } b = 1$$

$k = 2$ ise

$$2^a \cdot 3^b = 2^3 \cdot 3^1 \Rightarrow a = 3 \text{ ve } b = 1$$

.....

$$2^b \cdot 3^a \equiv 0 \pmod{27} \Rightarrow 2^b \cdot 3^a = 27 \cdot k$$

$k = 1$ ise

$$2^b \cdot 3^a = 2^0 \cdot 3^3 \Rightarrow a = 3 \text{ ve } b = 0$$

$k = 2$ ise

$$2^b \cdot 3^a = 2^1 \cdot 3^3 \Rightarrow a = 3 \text{ ve } b = 1$$

Buna göre, $(a + b)_{\min} = 3 + 1 = 4$ bulunur.

11. $1 < n < 50$ olmak üzere, pozitif bölenlerinin sayısı 3 olan kaç tane n tam sayısı vardır?

$n = a^p \cdot b^r \cdot c^s$ farklı asal çarpanlarının çarpımı şeklinde olsun.

n sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısı, $(p+1)(r+1)(s+1)$ dir.

Buna göre

Pozitif bölenlerinin sayısı 3 olduğundan,

$$(p+1)(r+1)(s+1) = 3$$

$$p+1 = 3$$

$$p = 2$$

$$r = 0$$

$$s = 0 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla

$$n = a^2$$

O zaman n , a asal sayısının karesi olur.

$$1 < n < 50 \Rightarrow 1 < a^2 < 50$$

$$n = 2^2$$

$$n = 3^2$$

$$n = 5^2$$

$$n = 7^2$$

12. x, y birer gerçel sayı ve $-1 < y < 0 < x$ olduğuna göre,

I. $x + y > 0 \rightarrow -$

II. $x - y > 1 \rightarrow -$

III. $x.(y+1) > 0 \rightarrow +$

ifadelerinden hangileri her zaman doğrudur?

$x = \frac{1}{2}$ ve $y = \frac{-1}{2}$ olsun.

$x + y = 0$

$x - y = 1$ olduğundan, I ve II ifadeleri her zaman doğru değildir.

$x > 0$ ve $y + 1 > 0$ olduğundan, III ifadesi her zaman doğrudur.

13. Gerçel sayılar kümesi üzerinde Δ işlemi, her a ve b gerçel sayısı için

$$a \Delta b = a^2 + 2^b$$

biçiminde tanımlanıyor.

$2 \Delta (1 \Delta x) = 12$ olduğuna göre, x kaçtır?

$$1 \Delta x = 1^2 + 2^x \Rightarrow 1 \Delta x = 1 + 2^x$$

$$2 \Delta (1 + 2^x) = 2^2 + 2^{1+2^x} \Rightarrow 2^2 + 2^{1+2^x} = 12$$

$$\Rightarrow 2^{1+2^x} = 2^3$$

$$\Rightarrow 1 + 2^x = 3$$

$$\Rightarrow 2^x = 2$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ elde edilir.}$$

14. Z tam sayılar kümesi olmak üzere, $f : Z \rightarrow Z$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre,

I. f bire birdir. \rightarrow +

II. f örtendir. \rightarrow -

III. f 'nin görüntü kümesi $Z \setminus \{0\}$ 'dir. \rightarrow -

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) I ve III

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5, \dots$$

$$f(-1) = -2, f(-2) = -3, f(-3) = -4, f(-4) = -5, \dots$$

x 'in her farklı değeri için $f(x)$ farklı bir değer aldığından, f bire birdir.

Görüntü kümesinde 0 ve -1 oluşmadığından, f örten değildir.

Görüntü kümesi : $Z \setminus \{-1, 0\}$ olacaktır.

15.

$$f(x) = |2x - 5|$$

$$g(x) = |x + 1|$$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $(g \circ f)(x) = 3$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

$$(g \circ f)(x) = 3 \Rightarrow g(f(x)) = 3$$

$$\Rightarrow g(|2x - 5|) = 3$$

$$\Rightarrow ||2x - 5| + 1| = 3$$

$$|2x - 5| + 1 = 3 \Rightarrow |2x - 5| = 2$$

$$\Rightarrow 2x - 5 = 2 \rightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow 2x - 5 = -2 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$|2x - 5| + 1 = -3 \Rightarrow |2x - 5| = -4 \rightarrow \emptyset$$

Buna göre, x değerlerinin toplamı : $\frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5$ elde edilir.

16. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu, her x gerçel sayısı için

$$f(x) < f(x+2)$$

eşitsizliğini sağlıyor.

Buna göre,

I. $f(1) < f(5)$

II. $|f(-1)| < |f(1)|$

III. $f(0) + f(2) < 2.f(4)$

ifadelerinden hangileri her zaman doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve III D) II ve III E) I, II ve III

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \text{ ise } f(1) < f(3) \\ x = 3 \text{ ise } f(3) < f(5) \end{array} \right\} f(1) < f(5) \rightarrow +$$

Örneğin, $f(x) = x - 5 \Rightarrow -6 < -4$

$$\Rightarrow |-6| < |-4| \Rightarrow 6 < 4 \text{ olur.}$$

Bu yüzden $|f(-1)| < |f(1)|$ için bir şey söylenemez. $\rightarrow -$

$$f(0) < f(2)$$

$$f(2) < f(4)$$

$$f(0) + f(2) < f(2) + f(4)$$

$$f(2) < f(4)$$

Eşitsizliğin her iki tarafına $f(4)$ eklenirse

$$f(2) + f(4) < f(4) + f(4)$$

$$f(0) + f(2) < f(2) + f(4) < f(4) + f(4) \Rightarrow f(0) + f(2) < 2.f(4) \rightarrow +$$

17. Bir öğrenci, doğru olduğunu düşündüğü aşağıdaki iddiayı ispatlarken bir hata yapmıştır.

İddia:

A, B, C herhangi kümeler olmak üzere, $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ 'dir.

Öğrencinin ispatı:

$A \setminus (B \cap C)$ kümesinin her elemanının $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ kümesinde olduğunu gösterirsem ispat biter.

Şimdi, $x \in A \setminus (B \cap C)$ alalım.

(I) Buradan $x \in A$ ve $x \notin (B \cap C)$ olur.

(II) Buradan $x \in A$ ve $(x \notin B$ ve $x \notin C)$ olur.

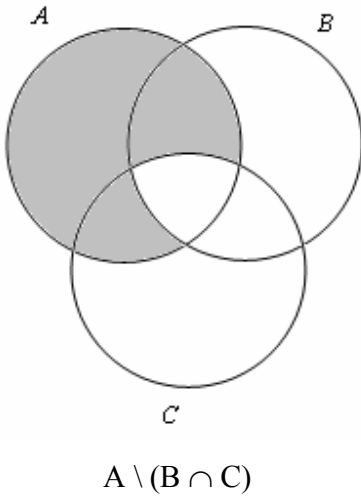
(III) Buradan $(x \in A$ ve $x \notin B)$ ve $(x \in A$ ve $x \notin C)$ olur.

(IV) Buradan $x \in A \setminus B$ ve $x \in A \setminus C$ olur.

(V) Buradan $x \in [(A \setminus B) \cap (A \setminus C)]$ olur.

Bu öğrenci, numaralandırılmış adımların hangisinde hata yapmıştır?

A) I B) II C) III D) IV E) V



$x \in A \setminus (B \cap C)$ alınmıştır.

Buna göre

(II) Buradan $x \in A$ ve $(x \notin B$ ve $x \notin C)$ olur. \rightarrow Hata yapmıştır.

18. a ve b birer pozitif tam sayı olmak üzere,

$$P(x) = (x + a).(x + b)$$

polinomunun katsayılarının toplamı 15 olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

$$P(1) = 15 \Rightarrow P(1) = (1 + a).(1 + b) = 15$$

$$= 15.1 = 1.15 = 3.5 = 5.3$$

$$\Rightarrow (a + 1).(b + 1) = 15.1 \Rightarrow a + 1 = 15 \text{ ve } b + 1 = 1$$

$$a = 14 \quad b = 0$$

$$\Rightarrow (a + 1).(b + 1) = 1.15 \Rightarrow a + 1 = 1 \text{ ve } b + 1 = 15$$

$$a = 0 \quad b = 14$$

a ve b birer pozitif tam sayı olacağına göre,

$$\Rightarrow (a + 1).(b + 1) = 3.5 \Rightarrow a + 1 = 3 \text{ ve } b + 1 = 5$$

$$a = 2 \quad b = 4$$

$$\Rightarrow (a + 1).(b + 1) = 5.3 \Rightarrow a + 1 = 5 \text{ ve } b + 1 = 3$$

$$a = 4 \quad b = 2$$

Buna göre, $a + b = 2 + 4 = 6$ elde edilir.

19.

$$P(x) = x^2 - 2x + m$$

$$Q(x) = x^2 + 3x + n$$

polinomları veriliyor.

Bu iki polinom ortak bir köke sahip ve $P(x)$ polinomunun kökleri eşit olduğuna göre, $m + n$ toplamı kaçtır?

$P(x)$ polinomunun kökleri eşit olduğuna göre, $\Delta = 0$ olmalıdır.

$$P(x) = x^2 - 2x + m \Rightarrow (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 0$$

$$\Rightarrow m = 1 \text{ bulunur.}$$

$$P(x) = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow P(x) = (x - 1)^2$$

$P(x)$ polinomunun kökü :

$$(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ olur.}$$

Bu iki polinom ortak bir köke sahip olduğundan,

$$Q(1) = 0 \Rightarrow 1^2 + 3 \cdot 1 + n = 0$$

$$\Rightarrow n = -4 \text{ olur.}$$

Buna göre, $m + n = 1 + (-4) = -3$ bulunur.

20. $y = x^2 - 2.(a + 1).x + a^2 - 1$ parabolü $y = 1$ doğrusuna teğet olduğuna göre, $a = ?$

I. Yol

Ortak çözümden parabol ile doğrunun kesişim noktası hesaplanır.

$$x^2 - 2.(a + 1).x + a^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2.(a + 1).x + a^2 - 2 = 0$$

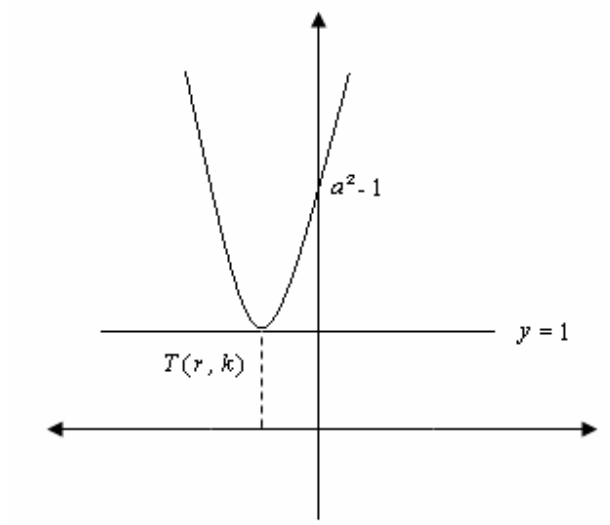
$\Delta = 0$ olmalıdır.

$$\Rightarrow [-2.(a + 1)]^2 - 4.1.(a^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a + 1 - a^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{-3}{2} \text{ elde edilir.}$$

II. Yol



$$y = x^2 - 2.(a+1).x + a^2 - 1 \Rightarrow x = 0 \text{ için } y = a^2 - 1 \text{ olur.}$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki parabollerin tepe noktası : $T(r, k)$ ise

$$\text{Tepe noktasının apsisi : } r = \frac{-b}{2a}$$

$$\text{Tepe noktasının ordinatı : } k = f(r)$$

olduğuna göre,

$$y = f(x) = x^2 - 2.(a+1).x + a^2 - 1 \Rightarrow r = a + 1$$

$$\Rightarrow k = f(a+1) = 1 \text{ bulunur.}$$

$f(a+1) = 1$ olduğuna göre,

$$f(a+1) = (a+1)^2 - 2.(a+1).(a+1) + a^2 - 1 = 1 \Rightarrow (a+1).[(a+1) - 2(a+1) + (a-1)] = 1$$

$$\Rightarrow -2.(a+1) = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1}{2} - 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{-3}{2} \text{ bulunur.}$$

21. Bir çiçekçide 5 farklı renkten çok sayıda gül ve 2 çeşit vazo vardır.

Bir müşteri, 2 farklı renkten toplam 3 gül ve 1 vazo satın almak istiyor.

Bu müşteri alışverişini kaç farklı şekilde yapabilir?

Renkler = A – B – C – D – E

Vazo = X – Y olsun.

$$\binom{5}{2} \cdot 2 \cdot \binom{2}{1} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 10 \cdot 4$$

= 40 farklı şekilde yapabilir.

22. Bir torbada 5 kırmızı ve 4 beyaz bilye vardır.

Bu torbadan aynı anda rastgele 3 bilye çekildiğinde her bir renkten en fazla 2 bilye olma olasılığı kaçtır?

I. Yol

3 bilye çekildiğinde bir renkten en fazla 2 bilye olması demek;

3'ünde kırmızı veya beyaz olmaması demektir.

Buna göre

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{5}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{5}{6} \text{ elde edilir.}$$

II. Yol

Kırmızı bilye \rightarrow 5

Beyaz bilye \rightarrow 4

$$\begin{aligned}\text{İstenen olasılık} &= \frac{\binom{5}{2} \binom{4}{1} + \binom{5}{1} \binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} \\ &= \frac{\frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} \cdot 4 + 5 \cdot \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!}}{\frac{9!}{(9-3)! \cdot 3!}} \\ &= \frac{10 \cdot 4 + 5 \cdot 6}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6}} \\ &= \frac{70}{84} \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

$$23. \frac{\cos 135 + \cos 330}{\sin 150} = ?$$

$$\cos 135 = \cos(180 - 135) = -\cos 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 330 = \cos(360 - 330) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 150 = \sin(180 - 150) = \sin 30 = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre,

$$\frac{\cos 135 + \cos 330}{\sin 150} = \frac{-\cos 45 + \cos 30}{\sin 30}$$

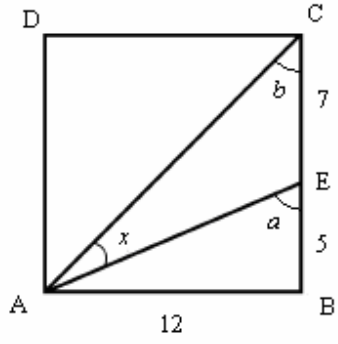
$$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

24.

I. Yol



$$\tan x = ?$$

$$b + x = a \Rightarrow x = a - b$$

$$\tan x = \tan(a - b)$$

$$= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

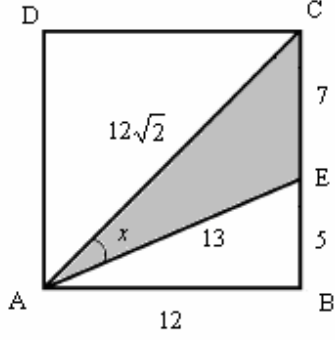
$$= \frac{\frac{12}{5} - \frac{12}{12}}{1 + \frac{12}{5} \cdot \frac{12}{12}}$$

$$= \frac{\frac{12}{5} - 1}{1 + \frac{12}{5} \cdot 1}$$

$$= \frac{\frac{7}{5}}{\frac{17}{5}}$$

$$= \frac{7}{17} \text{ elde edilir.}$$

II. Yol



$\tan x = ?$

AEC üçgeninin alanını iki değişik yoldan hesaplayabiliriz.

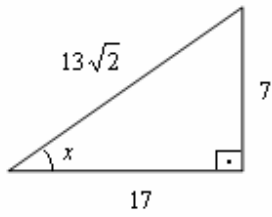
Birinci yol : $\frac{\text{taban} \times \text{yükseklik}}{2}$

İkinci yol : Herhangi iki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açının verilmesi ile hesaplanır.

Buna göre

$$\text{Alan(AEC)} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12\sqrt{2} \cdot \sin x = \frac{7 \cdot 12}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{7}{13\sqrt{2}}$$



Buna göre, $\tan x = \frac{7}{17}$ olur.

$$25. \cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{16 \sin x} \Rightarrow \sin 4x = ?$$

$$\cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{16 \sin x} \text{ iler - dışlar çarpımı yapılırsa}$$

$$16 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 1$$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x \text{ olduğuna gre,}$$

$$8 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 1$$

$$8 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 1$$

$$2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = \sin 4x \text{ olduğuna gre,}$$

$$4 \cdot 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 1$$

$$4 \cdot \sin 4x = 1$$

$$\sin 4x = \frac{1}{4} \text{ elde edilir.}$$

26. $x^2 - (\sin a)x - \frac{1}{4}(\cos^2 a) = 0$ denkleminin bir kökü $\frac{2}{3}$ ise $\sin a = ?$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 - (\sin a) \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{4}(\cos^2 a) = 0$$

$$\frac{4}{9} - \frac{2 \cdot \sin a}{3} - \frac{\cos^2 a}{4} = 0$$

$$16 - 24 \cdot \sin a - 9 \cdot \cos^2 a = 0$$

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ olduğuna göre,

$$16 - 24 \cdot \sin a - 9 \cdot (1 - \sin^2 a) = 0$$

$$16 - 24 \cdot \sin a - 9 + 9 \cdot \sin^2 a = 0$$

$$9 \cdot \sin^2 a - 24 \cdot \sin a + 7 = 0$$

$$(3 \cdot \sin a - 7) \cdot (3 \cdot \sin a - 1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot \sin a - 7 = 0 \Rightarrow \sin a = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \sin a - 1 = 0 \Rightarrow \sin a = \frac{1}{3}$$

Sonuç olarak

$-1 \leq \sin a \leq 1$ olduğuna göre, $\sin a = \frac{7}{3}$ olamaz.

O halde $\sin a = \frac{1}{3}$ olur.

27. Karmaşık sayılar kümesi üzerinde $f(z) = 1 - 2.z^6$ fonksiyonu tanımlanıyor.

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ için } f(z_0) = ?$$

$$f(z_0) = 1 - 2.z_0^6$$

$$z_0^6 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)^6$$

Bir karmaşık sayının kuvveti (De Moivre Formülü)'nden

$$z = r.(\cos \theta + i.\sin \theta) \text{ ise}$$

$$z^n = r^n.(\cos n.\theta + i.\sin n.\theta) \text{ , } n \in R \text{ olduğuna göre,}$$

$$z_0^6 = \left(\cos\left(6.\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(6.\frac{\pi}{3}\right) \right) \Rightarrow z_0^6 = (\cos 2\pi + i.\sin 2\pi)$$

$$\Rightarrow z_0^6 = 1 + i.0$$

$$\Rightarrow z_0^6 = 1$$

$$f(z_0) = 1 - 2.z_0^6 \Rightarrow f(z_0) = 1 - 2.1$$

$$\Rightarrow f(z_0) = -1 \text{ elde edilir.}$$

$$28. (|z| + z)(|z| - \bar{z}) = i$$

denklemini sağlayan z karmaşık sayılarının sanal kısmı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

I. Yol

$$z = a + ib \text{ olsun.}$$

$$b = ?$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\bar{z} = a - ib \text{ ise}$$

$$(|z| + z)(|z| - \bar{z}) = i$$

$$|z|^2 - |z|\bar{z} + z|z| - z\bar{z} = i$$

$$(a^2 + b^2) - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot (a - ib) + (a + ib) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} - (a + ib) \cdot (a - ib) = i$$

$$(a^2 + b^2) - \sqrt{a^2 + b^2} \cdot a + i \cdot b \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + a \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + i \cdot b \cdot \sqrt{a^2 + b^2} - (a^2 + b^2) = i$$

$$2 \cdot a \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + i \cdot 2 \cdot b \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = i$$

Buna göre, z karmaşık sayılarının sanal kısmı

$$2 \cdot b \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{1}{2|z|} \text{ olur.}$$

II. Yol

$$\left(|z| + z \right) \left(|z| - \bar{z} \right) = i$$

$$|z|^2 - |z| \cdot \bar{z} + z \cdot |z| - z \cdot \bar{z} = i$$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$ olduğundan

$$|z|^2 - |z| \cdot \bar{z} + z \cdot |z| - |z|^2 = i \quad \Rightarrow \quad -|z| \cdot \bar{z} + z \cdot |z| = i$$

$$\Rightarrow |z| \cdot (z - \bar{z}) = i$$

$z = a + i.b$ olsun.

$b = ?$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\bar{z} = a - i.b$ ise

$$\Rightarrow ((a + i.b) - (a - i.b)) = \frac{i}{|z|}$$

$$\Rightarrow i.2.b = \frac{i}{|z|}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2 \cdot |z|} \text{ elde edilir.}$$

29. 1 sayısına olan uzaklığı 2 birim ve i sayısına olan uzaklığı 3 birim olan $z = a + ib$ karmaşık sayıları için $a - b$ farkı kaçtır?

$$z = a + ib$$

$$z_1 = 1 \Rightarrow z_1 = 1 + i \cdot 0$$

$$|z - z_1| = 2 \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-0)^2} = 2$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + b^2 = 3$$

$$z_2 = i \Rightarrow z_2 = 0 + i \cdot 1$$

$$|z - z_2| = 3 \Rightarrow \sqrt{(a-0)^2 + (b-1)^2} = 3$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 2b = 8$$

$$a^2 - 2a + b^2 = 3$$

$$a^2 + b^2 - 2b = 8$$

$$2a - 2b = 5 \Rightarrow a - b = \frac{5}{2} \text{ elde edilir.}$$

$$30. \log_2 3x + \log_4 x^2 = 2 \Rightarrow x = ?$$

$$\log_2 3x + \log_{2^2} x^2 = 2$$

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a b \text{ olduğuna göre,}$$

$$\log_2 3x + \frac{2}{2} \cdot \log_2 x = 2$$

$$\log_2 3x + \log_2 x = 2$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c) \text{ olduğuna göre,}$$

$$\log_2 3x \cdot x = 2$$

$$\log_2 3x^2 = 2$$

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \text{ olduğuna göre,}$$

$$3x^2 = 2^2$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ bulunur.}$$

$$31. 2^x = \frac{1}{5} \text{ ve } 3^y = \frac{1}{4} \Rightarrow x.y = ?$$

$$2^x = \frac{1}{5} \Rightarrow 2^x = 5^{-1}$$

$$\Rightarrow \ln 2^x = \ln 5^{-1}$$

$$\Rightarrow x.\ln 2 = -\ln 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\ln 5}{\ln 2}$$

$$3^y = \frac{1}{4} \Rightarrow 3^y = 2^{-2}$$

$$\Rightarrow \ln 3^y = \ln 2^{-2}$$

$$\Rightarrow y.\ln 3 = -2.\ln 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{-2.\ln 2}{\ln 3}$$

Buna göre

$$x.y = \frac{-\ln 5}{\ln 2} \cdot \frac{-2.\ln 2}{\ln 3} \Rightarrow x.y = \frac{2.\ln 5}{\ln 3}$$

$$\Rightarrow x.y = \frac{\ln 5^2}{\ln 3}$$

$$\Rightarrow x.y = \frac{\ln 25}{\ln 3} \text{ elde edilir.}$$

$$32. \sum_{n=4}^9 \left(\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \right) = ?$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} &= \left(\frac{1+1}{1} \right) \left(\frac{2+1}{2} \right) \left(\frac{3+1}{3} \right) \left(\frac{4+1}{4} \right) \cdots \left(\frac{n+1}{n} \right) \\ &= \left(\frac{2}{1} \right) \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{4}{3} \right) \left(\frac{5}{4} \right) \cdots \left(\frac{n+1}{n} \right) \\ &= (n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=4}^9 \left(\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \right) &= \sum_{n=4}^9 (n+1) \\ &= (4+1) + (5+1) + (6+1) + (7+1) + (8+1) + (9+1) \\ &= 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ &= 45 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

33. (a_n) dizisi

$$a_n = \begin{cases} 2^n + 1, & n \equiv 0 \pmod{2} \\ 2^n - 1, & n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_9 - a_7}{a_8 - 4.a_6} = ?$$

$\begin{array}{r l} 9 & 2 \\ - 8 & 4 \\ \hline 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 8 & 2 \\ - 8 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 7 & 2 \\ - 6 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 6 & 2 \\ - 6 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}$
---	---	---	---

$$a_9 = 2^9 - 1$$

$$a_8 = 2^8 + 1$$

$$a_7 = 2^7 - 1$$

$$a_6 = 2^6 + 1$$

Buna göre

$$\frac{a_9 - a_7}{a_8 - 4.a_6} = \frac{2^9 - 1 - (2^7 - 1)}{2^8 + 1 - 4.(2^6 + 1)}$$

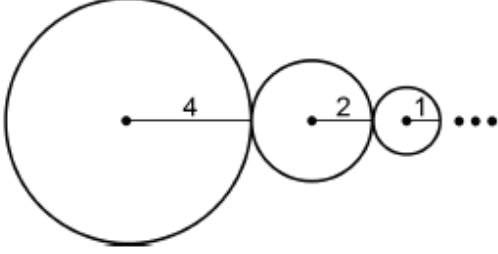
$$= \frac{2^9 - 1 - 2^7 + 1}{2^8 + 1 - 2^2 \cdot 2^6 - 4}$$

$$= \frac{2^9 - 2^7}{2^8 + 1 - 2^8 - 4}$$

$$= \frac{2^7 \cdot (2^2 - 1)}{-3}$$

$$= -2^7 \text{ elde edilir.}$$

34.



$$a_1 = 2.\pi.4 \Rightarrow a_1 = 8.\pi$$

$$a_2 = 2.\pi.2 \Rightarrow a_2 = 4.\pi$$

$$a_3 = 2.\pi.1 \Rightarrow a_3 = 2.\pi$$

.....
.....

O halde çemberlerin çevre uzunlukları toplamı

$$\zeta = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \Rightarrow \zeta = 8\pi + 4\pi + 2\pi + \dots$$

Bu ise ilk terimi $a_1 = 8.\pi$ ve

ortak çarpanı $r = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow r = \frac{4.\pi}{8.\pi} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$ olan geometrik seridir.

Buna göre

$$\zeta = 8\pi + 4\pi + 2\pi + \dots \Rightarrow \zeta = 8\pi.(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots)$$

$$\Rightarrow \zeta = 8\pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \zeta = 16\pi \text{ elde edilir.}$$

35. a , b ve c birer pozitif gerçel sayı olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ matris eşitliği veriliyor.}$$

$$a + b + c = ?$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a.a + b.0 & a.b + b.c \\ 0.a + c.0 & 0.b + c.c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & a.b + b.c \\ 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$a.b + b.c = 2 \Rightarrow 3.b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

Buna göre

$$a + b + c = 1 + \frac{2}{3} + 2 = \frac{11}{3} \text{ elde edilir.}$$

36. Bir A matrisinin çarpma işlemine göre tersi A^{-1} olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = [a] \Rightarrow a = ?$$

$A.A^{-1} = I$ olduğuna göre,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = ?$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1.a+0.b & 1.c+0.d \\ 3.a+1.b & 3.c+1.d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ 3a+b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a = 1, c = 0, b = -3, d = 1 \text{ bulunur.}$$

Buna göre, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = [a] \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = [a]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1+0.4 \\ -3.1+1.4 \end{bmatrix} = [a]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [a]$$

$$\Rightarrow [2.1+1.1] = [a]$$

$$\Rightarrow [3] = [a]$$

$$\Rightarrow a = 3 \text{ bulunur.}$$

37. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$(2A - B) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 4-1 & 6-2 \\ 2-0 & 4-5 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3x + 4y \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buna göre doğrusal denklem sistemi : $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ olur.

38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2 - \sqrt{4-x}} = ?$

$x \rightarrow 0$ için $\frac{\sin 3 \cdot 0}{2 - \sqrt{4-0}} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

L'Hospital teoremi uygulanırsa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 3x)'}{(2 - \sqrt{4-x})'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \cos 3x}{\frac{1}{2\sqrt{4-x}}} = \frac{3 \cdot \cos 3 \cdot 0}{\frac{1}{2\sqrt{4-0}}} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 12 \text{ elde edilir.}$$

$$39. \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot \ln(x^2-1) = ?$$

$x \rightarrow 1^+$ için $(1-1) \cdot (\ln(1^2-1)) = 0 \cdot \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot \ln(x^2-1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x^2-1)}{\left(\frac{1}{x-1}\right)} \text{ olarak yazılırsa}$$

$$x \rightarrow 1^+ \text{ için } \frac{\ln(1^2-1)}{\left(\frac{1}{1-1}\right)} = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği vardır.}$$

L'Hospital teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\ln(x^2-1))'}{\left(\frac{1}{x-1}\right)'} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\frac{2x}{x^2-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x}{x^2-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x-1)(x-1)}{-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x}{x+1} \cdot \frac{(x-1)}{-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x-2x^2}{x+1} \right) \\ &= \left(\frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2}{1+1} \right) \\ &= \frac{0}{2} \\ &= 0 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

40. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(2x-1) + f(5-x)}{f(x^2-1)} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(2x-1) + f(5-x)}{f(x^2-1)} = \frac{f(2 \cdot 2 - 1) + f(5 - 2)}{f(2^2 - 1)}$$

$$= \frac{f(3^+) + f(3^-)}{f(3^+)}$$

$$= \frac{1 + 2}{1}$$

$$= 3 \text{ bulunur.}$$

41.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \leq 1 \\ x^2 + a \cdot x + b & , \quad 1 < x < 3 \\ 5 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

fonksiyonu gerçel sayılar kümesinde sürekli olduğuna göre, $a - b = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \quad \Rightarrow \quad a + b + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad a = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \quad \Rightarrow \quad 9 + 3a + b = 5$$

$$\Rightarrow \quad 3a + b = -4$$

Buna göre $a = -2$ ve $b = 2$ bulunur.

O halde

$$a - b = -2 - 2 = -4 \text{ elde edilir.}$$

42. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları için

$$f(g(x)) = x^2 + 4x - 1$$

$$g(x) = x + a$$

$$f'(0) = 1$$

$$a = ?$$

$$f(x+a) = x^2 + 4x - 1 \Rightarrow 1. f'(x+a) = 2x + 4$$

$$\Rightarrow f'(x+a) = 2x + 4$$

$$x+a=0 \text{ ise } x=-a$$

$$f'(-a+a) = 2(-a) + 4 \Rightarrow f'(0) = -2a + 4$$

$f'(0) = 1$ olduğuna göre,

$$-2a + 4 = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

$$43. f(2x+5) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Rightarrow f'(6) = ?$$

$$2.f'(2x+5) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$$

$$2x+5=6 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ için}$$

$$2.f'(6) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)\right) \Rightarrow 2.f'(6) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow 2.f'(6) = \frac{\pi}{2} \cdot (1+1)$$

$$\Rightarrow 2.f'(6) = \frac{\pi}{2} \cdot 2$$

$$\Rightarrow f'(6) = \frac{\pi}{2} \text{ bulunur.}$$

44. Baş katsayısı 1 olan, üçüncü dereceden gerçel katsayılı bir $P(x)$ polinom fonksiyonunun köklerinden ikisi -5 ve 2 'dir.

$P(x)$ 'in $x = 0$ noktasında bir yerel ekstremumu olduğuna göre, üçüncü kökü kaçtır?

$P(x)$ polinom fonksiyonunun üçüncü kökü $= c$ olsun.

$$a = 1$$

$$x_1 = -5$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = c$$

$$P(x) = a.(x - x_1).(x - x_2).(x - x_3)$$

$$P(x) = 1.(x + 5).(x - 2).(x - c)$$

$$P(x) = (x^2 + 3x - 10).(x - c)$$

$P(x)$ 'in $x = 0$ noktasında bir yerel ekstremumu olduğuna göre, $P'(0) = 0$ olur.

$$P(x) = (x^2 + 3x - 10).(x - c) \Rightarrow P'(x) = (2x + 3).(x - c) + 1.(x^2 + 3x - 10)$$

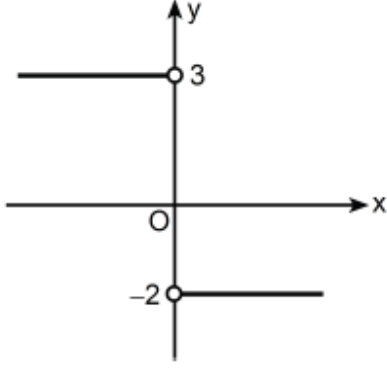
$$\Rightarrow P'(x) = 2x^2 - 2x.c + 3x - 3c + x^2 + 3x - 10$$

$$\Rightarrow P'(x) = 3x^2 + (6 - 2.c).x - 3c - 10$$

$$P'(0) = 3.0^2 + (6 - 2.c).0 - 3c - 10 \Rightarrow -3c - 10 = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{-10}{3} \text{ bulunur.}$$

45. Aşağıda, gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre,

I. $f(2) - f(1) = -2$ 'dir. \rightarrow +

II. f fonksiyonunun $x = 0$ noktasında yerel maksimumu vardır. \rightarrow +

III. İkinci türev fonksiyonu $x = 0$ noktasında tanımlıdır. \rightarrow -

ifadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

$$x > 0 \text{ için } f'(x) = -2 \Rightarrow \int f'(x) = \int -2$$

$$\Rightarrow f(x) = -2x + c_1$$

$$f(2) = -2 \cdot 2 + c_1 \Rightarrow f(2) = -4 + c_1$$

$$f(1) = -2 \cdot 1 + c_1 \Rightarrow \underline{f(1) = -2 + c_1}$$

$$f(2) - f(1) = -2 \text{ elde edilir.}$$

$$x < 0 \text{ için } f'(x) = 3 \Rightarrow \int f'(x) = \int 3$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x + c_2$$


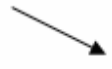
Ayrıca f fonksiyonu sürekli olduğundan, $c_1 = c_2$ dir.

.....
 $x = 0$ kritik noktadır.

$x > 0$ için $f'(x) = -2 < 0$ olduğundan $f(x)$ azalandır.

$x < 0$ için $f'(x) = 3 > 0$ olduğundan $f(x)$ artandır.

Verilenlere göre $f'(x)$ 'in işaret tablosunu oluşturalım.

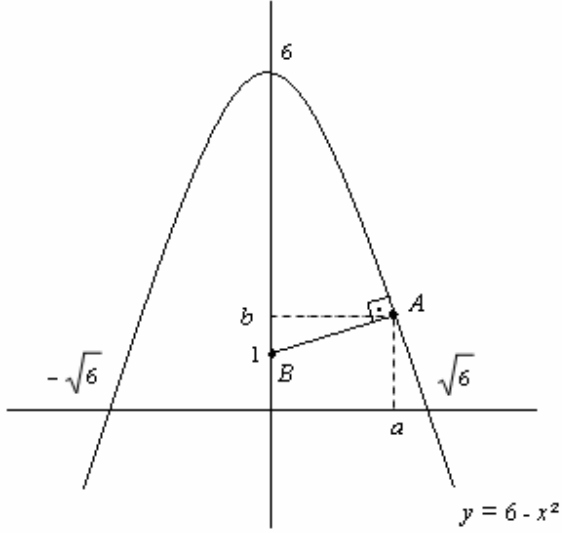
x	0	
$f'(x)$	++++	----
$f(x)$		

Bu nedenle f fonksiyonu $x = 0$ noktasında yerel maksimumu sahiptir.

.....
1. türevin tanımsız olduğu yerde 2. türevin tanımlı olması mümkün değildir.

46. $x > 0$ olmak üzere; $y = 6 - x^2$ eğrisinin grafiği üzerinde ve $(0, 1)$ noktasına en yakın olan nokta (a, b) olduğuna göre, b kaçtır?

I. Yol



$y = 6 - x^2$ eğrisinin grafiği üzerinde ve $B(0, 1)$ noktasına en yakın olan nokta $A(a, b)$ ise

$$y = 6 - x^2 \Rightarrow b = 6 - a^2$$

$A(a, b) = A(a, 6 - a^2)$ ve $B(0, 1)$ ise

İki nokta arası uzaklıktan

$$|AB| = \sqrt{(a-0)^2 + (6-a^2-1)^2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{a^2 + (5-a^2)^2} \text{ olur.}$$

Bu fonksiyonun en küçük değerini bulmamız gerekir.

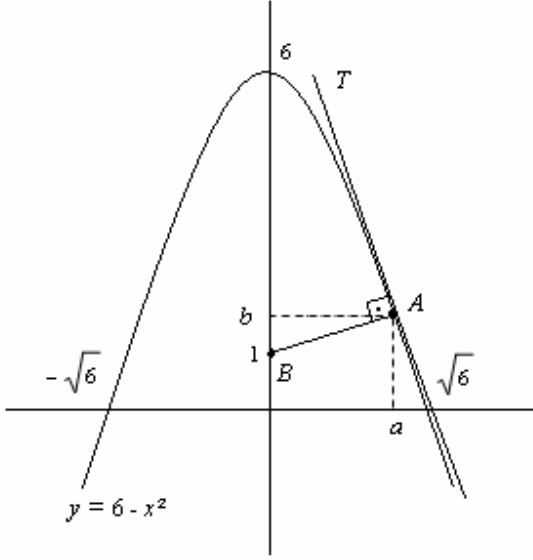
$$|AB|' = 0 \Rightarrow \frac{2a + 2 \cdot (5 - a^2) \cdot (-2a)}{2\sqrt{a^2 + (5 - a^2)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 2a \cdot (1 - 10 + 2a^2) = 0$$

$$\Rightarrow 2a \cdot (2a^2 - 9) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ veya } a = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Buna göre $b = 6 - a^2$ olduğundan, $b = 6 - \frac{9}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$ bulunur.

II. Yol



En yakın nokta olması için A noktasındaki teğet $AB \perp AT$ olmalıdır.

$$y = 6 - x^2 \Rightarrow b = 6 - a^2$$

$$\text{Teğetin eğimi} = m_{AT} = y'_a = -2a$$

$$A(a, b) = A(a, 6 - a^2) \text{ ve } B(0, 1) \text{ ise}$$

BA nın eğimi, iki noktası bilinen doğrunun eğiminden

$$m_{BA} = \frac{6 - a^2 - 1}{a - 0} \Rightarrow m_{BA} = \frac{5 - a^2}{a}$$

Dik doğruların eğimleri çarpımı -1 olduğundan,

$$m_{BA} \cdot m_{AT} = -1 \Rightarrow \left(\frac{5 - a^2}{a} \right) \cdot (-2a) = -1$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = \frac{9}{2}$$

Buna göre $b = 6 - a^2$ olduğundan, $b = \frac{3}{2}$ bulunur.

$$47. \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int 2 dx \text{ eşitliği veriliyor. } f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow f(3) = ?$$

$$f(x) = u \Rightarrow f'(x) dx = du$$

$$\int \frac{f'(x)}{u^2} \frac{du}{f'(x)} = \int 2 dx \Rightarrow \int \frac{1}{u^2} du = \int 2 dx$$

$$\Rightarrow \int u^{-2} du = 2x + c_1$$

$$\Rightarrow \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + c_2 = 2x + c_1$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{u} + c_2 = 2x + c_1$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{u} = 2x + c_1 - c_2$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{u} = 2x + (c_1 - c_2) \rightarrow c_1 - c_2 = c \text{ diyelim.}$$

$$\Rightarrow u = \frac{-1}{2x + c}$$

$f(x) = u$ olduğundan

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-1}{2x + c}$$

$f(0) = \frac{1}{2}$ olduğuna göre,

$$f(0) = \frac{-1}{2 \cdot 0 + c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = -2 \text{ olur.}$$

Buna göre

$$f(x) = \frac{-1}{2x - 2} \Rightarrow f(3) = \frac{-1}{2 \cdot 3 - 2} = \frac{-1}{4} \text{ olarak hesaplanır.}$$

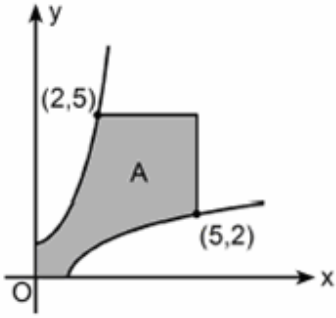
48. $\int (\arcsin x)^2 dx$ integralinde $u = \arcsin x$ dönüşümü yapılırsa,

$$u = \arcsin x$$

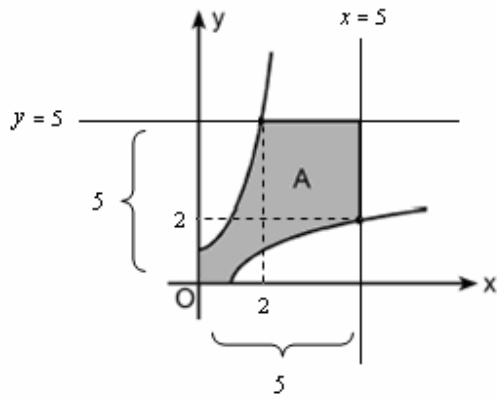
$$\sin u = x \Rightarrow \cos u du = dx$$

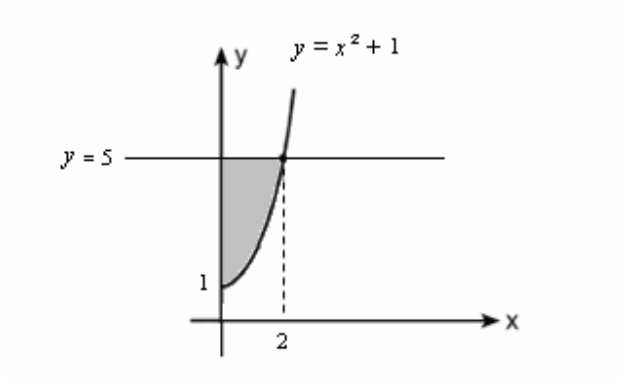
$$\int (\arcsin x)^2 dx = \int u^2 \cdot \cos u du \text{ elde edilir.}$$

49. Birinci bölgede; koordinat eksenleri, $x = 5$, $y = 5$ doğruları ve $y = x^2 + 1$, $x = y^2 + 1$ eğrileri arasında kalan A bölgesi aşağıda verilmiştir.



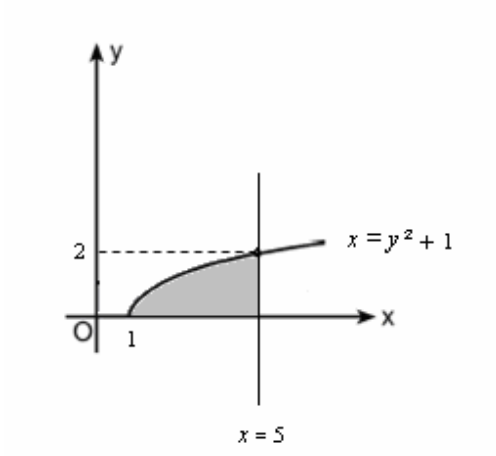
A bölgesinin alanı kaç birim karedir?





$y = 5$ doğrusu ile $y = x^2 + 1$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanı :

$$\begin{aligned}\text{Boyalı alan} &= \int_0^2 [5 - (x^2 + 1)] dx \\ &= \int_0^2 (4 - x^2) dx \\ &= \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\ &= \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(4 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} \right) \\ &= \frac{16}{3}\end{aligned}$$



$x = 5$ doğrusu ile $x = y^2 + 1$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanı :

$$\begin{aligned}\text{Boyalı alan} &= \int_0^2 [5 - (y^2 + 1)] dy \\ &= \int_0^2 (4 - y^2) dy \\ &= \left(4y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\ &= \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(4 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} \right) \\ &= \frac{16}{3}\end{aligned}$$

Buna göre

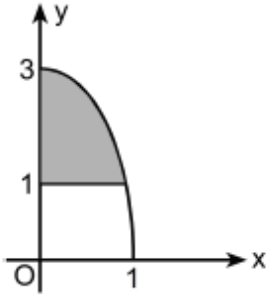
Alan(A) = Karenin alanı – Boş alanların toplamı

$$\text{Alan}(A) = 5.5 - \left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3} \right)$$

$$\text{Alan}(A) = 25 - \frac{32}{3}$$

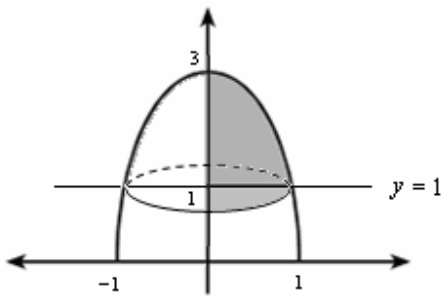
$$\text{Alan}(A) = \frac{43}{3} \text{ bulunur.}$$

50.



Birinci bölgede; y eksenini, $y = 1$ doğrusu ve $9x^2 + y^2 = 9$ elipsi arasında kalan bölge y eksenini etrafında 360° döndürülüyor.

Elde edilen dönel cismin hacmi kaç birim küptür?



$$V = \pi \cdot \int_1^3 x^2 dy \text{ olduğuna göre,}$$

$$9x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9 - y^2}{9}$$

$$V = \pi \cdot \int_1^3 \left(\frac{9 - y^2}{9} \right) dy \Rightarrow V = \frac{\pi}{9} \cdot \int_1^3 (9 - y^2) dy$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{9} \cdot \left[9y - \frac{y^3}{3} \right]_1^3$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{9} \cdot \left[\left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left(9 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} \right) \right]$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{9} \cdot \left[18 - \frac{26}{3} \right]$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{9} \cdot \left[\frac{28}{3} \right]$$

$$\Rightarrow V = \frac{28 \cdot \pi}{27} \text{ elde edilir.}$$

Adnan ÇAPRAZ

adnancapraz@yahoo.com

AMASYA