Lisans Yerleştirme Sınavı – 1 (Lys – 1) / 18 Haziran 2011

Matematik Soruları ve Çözümleri

1. $\dfrac{3}{0{,}2} - (0{,}25)^{-2}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $\dfrac{-2}{5}$ B) $\dfrac{3}{10}$ C) $\dfrac{1}{15}$ D) – 1 E) – 3

Çözüm 1

$$\frac{3}{0{,}2} - (0{,}25)^{-2} = \frac{3}{\frac{2}{10}} - \left(\frac{25}{100}\right)^{-2}$$

$$= \frac{30}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

$$= 15 - (4^{-1})^{-2}$$

$$= 15 - (4^{(-1).(-2)})$$

$$= 15 - 4^{2}$$

$$= 15 - 16$$

$$= -1$$

2. $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$ olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{6}{5}$

Çözüm 2

I. Yol

$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{2})^2 < x^2 < (\sqrt{3})^2 \quad \Rightarrow \quad 2 < x^2 < 3$

A) $x = \frac{1}{2}$ için : $x^2 = \frac{1}{4}$

B) $x = \frac{3}{2}$ için : $x^2 = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad 2 < \frac{9}{4} < 3$

C) $x = \frac{4}{3}$ için : $x^2 = \frac{16}{9}$

D) $x = \frac{7}{4}$ için : $x^2 = \frac{49}{16}$

E) $x = \frac{6}{5}$ için : $x^2 = \frac{36}{25}$

II. Yol

$\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$

2 sayısının karekökünü yaklaşık olarak hesaplayalım.

2 den küçük en büyük tam kare 1,

2 den büyük en küçük tam kare 4 olduğundan, a = 1 ve b = 4 dır.

$\sqrt{2} \approx \sqrt{1} + \dfrac{2-1}{4-1} = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$ olarak bulunuyor.

3 sayısının karekökünü yaklaşık olarak hesaplayalım.

3 den küçük en büyük tam kare 1,

3 den büyük en küçük tam kare 4 olduğundan, a = 1 ve b = 4 dır.

$\sqrt{2} \approx \sqrt{1} + \dfrac{3-1}{4-1} = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$ olarak bulunuyor.

$\dfrac{4}{3} < x < \dfrac{5}{3} \quad \Rightarrow$ 2 ile genişletilirse

$\dfrac{8}{6} < x < \dfrac{10}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{9}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{3}{2}$ elde edilir.

Not :

Bir x pozitif tam sayısının karekökü <u>yaklaşık olarak</u> aşağıdaki yöntemle bulunuyor :

• x sayısından küçük en büyük tam kareyle x sayısından büyük en küçük tam kare bulunuyor. Bu sayılardan ilki a, ikincisi b olarak adlandırılıyor.

• x sayısının karekökü $\sqrt{x} \approx \sqrt{a} + \dfrac{x-a}{b-a}$ formülüyle bulunuyor.

3. $t^3 - 2 = 0$ olduğuna göre, $\dfrac{1}{t^2+t+1}$ ifadesinin t türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $t + 1$ B) $t - 2$ C) $t - 1$ D) $t^2 + 1$ E) $t^2 + 3$

Çözüm 3

$t^3 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^3 - 1 = 1$

$t^3 - 1 = (t-1).(t^2+t+1)$ olduğuna göre, $t^2 + t + 1 = \dfrac{t^3-1}{t-1}$

$$\frac{1}{t^2+t+1} = \frac{1}{\dfrac{t^3-1}{t-1}} = \frac{t-1}{t^3-1}$$

$t^3 - 1 = 1$ olduğuna göre, $\dfrac{t-1}{1} = t - 1$ bulunur.

4. a ve b sayılarının geometrik ortalaması 3, aritmetik ortalaması ise 6 'dır.
Buna göre, a^2 ve b^2 sayılarının aritmetik ortalaması kaçtır?

A) 67 B) 65 C) 63 D) 61 E) 57

Çözüm 4

a ve b sayılarının geometrik ortalaması = $\sqrt{a.b} = 3 \quad \Rightarrow \quad a.b = 9$

a ve b sayılarının aritmetik ortalaması = $\dfrac{a+b}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad a + b = 12$

$(a + b)^2 = 12^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + 2.a.b + b^2 = 144$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 144 - 18$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 126$

a^2 ve b^2 sayılarının aritmetik ortalaması = $\dfrac{a^2+b^2}{2} = \dfrac{126}{2} = 63$ elde edilir.

5. $x - 2y = 3$ olduğuna göre,

$x^2 + 4y^2 - 4xy - 2y + x - 3$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 8 D) 9 E) 15

Çözüm 5

$$x^2 + 4y^2 - 4xy - 2y + x - 3 = x^2 - 4xy + 4y^2 + x - 2y - 3$$

$$= (x - 2y)^2 + x - 2y - 3$$

$x - 2y = 3$ olduğuna göre,

$$= 3^2 + 3 - 3$$

$$= 9$$

6. x ve y birer gerçel sayı olmak üzere,

$x^3 - 3x^2y = 3$

$y^3 - 3xy^2 = 11$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, $x - y$ farkı kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 1 D) -2 E) -3

Çözüm 6

$x^3 - 3x^2y = 3$

$y^3 - 3xy^2 = 11$ taraf tarafa çıkartılırsa

$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 3 - 11$

$(x - y)^3 = -8$

$(x - y)^3 = (-2)^3$

$x - y = -2$ bulunur.

7. İki basamaklı a ve b pozitif tam sayıları için

$$\frac{a!}{b!} = 132$$

olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

Çözüm 7

$$\frac{a!}{b!} = 132 \quad \Rightarrow \quad \frac{a!}{b!} = 12.11 \quad \Rightarrow \quad a! = 12.11.b!.$$

$$\Rightarrow \quad b! = 10! \quad \Rightarrow \quad b = 10$$

$$\Rightarrow \quad a! = 12! \quad \Rightarrow \quad a = 12$$

Buna göre , $a + b = 12 + 10 = 22$ elde edilir.

8. $$\frac{a^4 - a^3}{a^4 + a^2} . \frac{a^2 + 1}{a^2 - a}$$

ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a - 1$ B) a C) 1 D) $a + 1$ E) $a^2 + 1$

Çözüm 8

$$\frac{a^4 - a^3}{a^4 + a^2} . \frac{a^2 + 1}{a^2 - a} = \frac{a^3.(a-1)}{a^2.(a^2+1)} . \frac{a^2 + 1}{a.(a-1)} = 1$$

9. $\dfrac{2(x-y)}{x-y-1}+\dfrac{x-y-1}{x-y-2}=3$ olduğuna göre, $x-y$ farkı kaçtır?

A) $\dfrac{-1}{2}$ B) $\dfrac{-2}{3}$ C) $\dfrac{4}{3}$ D) $\dfrac{5}{3}$ E) $\dfrac{5}{4}$

Çözüm 9

$\dfrac{2(x-y)}{x-y-1}+\dfrac{x-y-1}{x-y-2}=3 \quad \Rightarrow \quad x-y=t$ olsun.

$$\frac{2.t}{t-1}+\frac{t-1}{t-2}=3 \quad \Rightarrow \quad \frac{2.t}{\underset{t-2}{t-1}}+\frac{t-1}{\underset{t-1}{t-2}}=3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2.t.(t-2)+(t-1).(t-1)}{(t-1).(t-2)}=3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2t^2-4t+t^2-2t+1}{t^2-3t+2}=3$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{3t^2-6t+1}{t^2-3t+2}=3$ içler – dışlar çarpımı yapılırsa

$$\Rightarrow \quad 3t^2-6t+1=3t^2-9t+6$$

$$\Rightarrow \quad 3t=5$$

$$\Rightarrow \quad t=\frac{5}{3}$$

$x-y=t$ olduğuna göre, $x-y=\dfrac{5}{3}$ olur.

10. $A = \{n \in Z^+ \mid n \leq 100 \text{ ; n, 3'e tam bölünür.}\}$

$B = \{n \in Z^+ \mid n \leq 100 \text{ ; n, 5'e tam bölünür.}\}$

kümeleri veriliyor.

Buna göre, A \ B fark kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 33 B) 32 C) 30 D) 28 E) 27

Çözüm 10

$s(A \setminus B) = s(A) – s(A \cap B)$

A için

3'ün katı olan her sayı 3'e kalansız bölünür.

101 den küçük olan ve 3'ün katı olan kaç tane sayı olduğunu bulmak için

101 sayısı 3'e bölünür ve bölüm alınır.

$$\begin{array}{r|l} 101 & 3 \\ \cline{2-2} & 33 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Buna göre, 33 tane sayı 3 ile tam bölünür. $\Rightarrow$ $s(A) = 33$

$A \cap B$ için

Hem 3 hem de 5 ile tam bölünebilen sayılar, okek(3 , 5) = 15 ile de tam bölünür.

101 sayısı 15'e bölünür ve bölüm alınır.

$$\begin{array}{r|l} 101 & 15 \\ \cline{2-2} & 6 \\ \hline 11 & \end{array}$$

Buna göre, 6 tane sayı 15 ile tam bölünür. $\Rightarrow$ $s(A \cap B) = 6$

$s(A \setminus B) = s(A) – s(A \cap B)$

$= 33 – 6$

$= 27$ bulunur.

11. p ve q birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere

$$a = p^4.q^2$$

$$b = p^2.q^3$$

veriliyor.

Buna göre, a ve b sayılarının en büyük ortak böleni aşağıdakilerden hangisidir?

A) $p^5.q^4$ B) $p^4.q^3$ C) $p^3.q^4$ D) $p^2.q^2$ E) $p^2.q^3$

Çözüm 11

Obeb(a , b) = $p^2.q^2$

Not : Ortak bölenlerin en büyüğü (obeb)

Sayılar asal çarpanlarına ayrılır.

Ortak asal çarpanların en küçük üslüleri (üsler eşitse biri) alınır ve çarpılır.

12. $2^x \equiv 1$ (mod 7)

$3^y \equiv 4$ (mod 7)

denkliklerini sağlayan en küçük x ve en küçük y pozitif tam sayıları için $y - x$ farkı kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm 12

$2^x \equiv 1$ (mod 7)

$x = 3$ için : $2^3 = 8 \equiv 1$ (mod 7)

$3^y \equiv 4$ (mod 7)

$y = 4$ için : $3^4 = 81 \equiv 4$ (mod 7)

Buna göre, $y - x = 4 - 3 = 1$ olur.

13. $x.(3-x) > 0$

$(2x+1).(x-2) < 0$

Yukarıda verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi (a , b) açık aralığı olduğuna göre, a – b farkı kaçtır?

A) – 2 B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm 13

		$-\frac{1}{2}$		0		2		3	
x	− − −		− −	0	+ + +		+ +		+ + +
3 - x	+ + +		+ +		+ + +		+ +	0	− − −
x.(3 - x)	− − −		− −	0	+ + +		+ +	0	− − −
2x + 1	− − −	0	+ +		+ + +		+ +		+ + +
x - 2	− − −		− −		− − −	0	+ +		+ + +
(2x + 1).(x - 2)	+ + +	0	− −		− − −	0	+ +		+ + +

Çözüm kümesi = (0 , 2) = (a , b)

Buna göre, a – b = 0 – 2 = – 2 bulunur.

14. A = {a , b , c , d , e} kümesi üzerinde Δ işlemi aşağıdaki tabloyla tanımlanıyor.

Örneğin ; a Δ d = c ve d Δ a = a ’dır.

Δ	a	b	c	d	e
a	a	b	a	c	d
b	c	b	b	a	e
c	a	b	c	d	e
d	a	a	d	d	b
e	e	e	e	d	a

Bu tabloya göre A kümesinin

K = {b , c , d}

L = {a , b , c}

M = {c , d , e}

alt kümelerinden hangileri Δ işlemine göre kapalıdır?

A) Yalnız K B) Yalnız L C) K ve L D) K ve M E) L ve M

Çözüm 14

K = {b , c , d} için

b Δ d = a $\notin$ K olduğundan Δ işlemine göre kapalı değildir.

L = {a , b , c} için

Δ	a	b	c
a	a	b	a
b	c	b	b
c	a	b	c

$\forall$ a , b , c $\in$ L olduğundan Δ işlemine göre kapalıdır.

M = {c , d , e} için

d Δ e = b $\notin$ M olduğundan Δ işlemine göre kapalı değildir.

Not : Bir Kümenin Bir İşleme Göre Kapalılığı

A üzerinde bir "Δ" işlemi verildiğinde

$\forall$ x , y $\in$ A için x Δ y $\in$ A oluyorsa A kümesi "Δ" işlemine göre kapalıdır denir.

15. x bir <u>gerçel</u> sayı ve $|x| \leq 4$ olmak üzere,

$$2x + 3y = 1$$

eşitliğini sağlayan y <u>tam sayı</u> değerlerinin toplamı kaçtır?

A) – 1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm 15

$|x| \leq 4 \quad \Rightarrow \quad -4 \leq x \leq 4$

$2x + 3y = 1 \quad \Rightarrow \quad 3y = 1 - 2x \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{1-2x}{3}$

$-4 \leq x \leq 4 \quad \Rightarrow \quad (-2).(-4) \geq -2x \geq 4.(-2) \quad \Rightarrow \quad 8 \geq -2x \geq -8$

$1 + 8 \geq 1 - 2x \geq -8 + 1 \quad \Rightarrow \quad 9 \geq 1 - 2x \geq -7$

$\dfrac{9}{3} \geq \dfrac{1-2x}{3} \geq \dfrac{-7}{3} \quad \Rightarrow \quad 3 \geq \dfrac{1-2x}{3} \geq \dfrac{-7}{3}$

$\Rightarrow \quad 3 \geq y \geq \dfrac{-7}{3}$

y tam sayı değerleri = {– 2 , – 1 , 0 , 1 , 2 , 3}

y tam sayı değerleri toplamı = 3 olur.

16. Gerçel katsayılı P(x), Q(x) ve R(x) polinomları veriliyor.

Sabit terimi sıfırdan farklı P(x) polinomu için

$$P(x) = Q(x).R(x + 1)$$

eşitliği sağlanıyor.

P'nin sabit terimi Q'nun sabit teriminin iki katı olduğuna göre,

R'nin katsayılarının toplamı kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 1 E) 2

Çözüm 16

P(x) polinomunun sabit terimi : $P(0) \neq 0$

$P(x) = Q(x).R(x + 1) \Rightarrow P(0) = Q(0).R(0 + 1)$

$\Rightarrow P(0) = Q(0).R(1)$

Q(x) polinomunun sabit terimi : Q(0)

$P(0) = 2.Q(0)$

R(x) polinomunun katsayılarının toplamı : R(1)

$P(0) = Q(0).R(1)$ olduğundan,

$2.Q(0) = Q(0).R(1) \Rightarrow R(1) = 2$ elde edilir.

17. Baş katsayısı 1 olan, – *i* ve 2*i* karmaşık sayılarını kök kabul eden dördüncü dereceden gerçel katsayılı P(x) polinomu için P(0) kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm 17

$x_1 = -\,i$

$x_2 = 2i$

P(x) = a.(x + i).(x – i).(x – 2i).(x + 2i) $\Rightarrow$ a = 1 olduğuna göre,

P(x) = 1.(x + i).(x – i).(x – 2i).(x + 2i) $\Rightarrow$ P(x) = (x + i).(x – i).(x – 2i).(x + 2i)

$\Rightarrow$ $P(x) = (x^2 - (i)^2).(x^2 - (2i)^2)$

$\Rightarrow$ $P(x) = (x^2 - i^2).(x^2 - 4i^2)$

$i^2 = -1$ olduğuna göre, $\Rightarrow$ $P(x) = (x^2 + 1).(x^2 + 4)$

P(0) = (0 + 1).(0 + 4) $\Rightarrow$ P(0) = 1.4 $\Rightarrow$ P(0) = 4 bulunur.

Not :

Gerçel katsayılı bir denklemin köklerinden birisi z = a + bi ise

diğer kök bu kökün eşleniği olan $\bar{z}$ = a – bi dir.

18. $P(x) = (x+2)^4 + 3(x+1)^3$ polinomunda x'li terimin katsayısı kaçtır?

A) 41 B) 39 C) 37 D) 35 E) 33

Çözüm 18

I. Yol

$P(x) = (x+2)^4 + 3(x+1)^3$

$P(x) = (x+2)^2.(x+2)^2 + 3(x+1)(x+1)^2$

$P(x) = (x^2+4x+4).(x^2+4x+4) + 3(x+1).(x^2+2x+1)$

$P(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x^3 + 16x^2 + 16x + 4x^2 + 16x + 16 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 3x^2 + 6x + 3$

$P(x) = x^4 + 11x^3 + 33x^2 + 41x + 19$

$P(x)$ polinomunda x'li terimin katsayısı = 41 bulunur.

II. Yol

$P(x) = (x+2)^4 + 3(x+1)^3$

Binom formülüne göre,

$$(x+2)^4 = \binom{4}{0}.x^4 + \binom{4}{1}.x^3.2 + \binom{4}{2}.x^2.2^2 + \binom{4}{3}.x.2^3 + \binom{4}{4}.2^4$$

x'li terimin katsayısı = $\binom{4}{3}.2^3 = 32$

Binom formülüne göre,

$$3.(x+1)^3 = 3.\binom{3}{0}.x^3 + 3.\binom{3}{1}.x^2.1 + 3.\binom{3}{2}.x.1^2 + 3.\binom{3}{3}.1^3$$

x'li terimin katsayısı = $3.\binom{3}{2}.1^2 = 9$

Buna göre, $P(x)$ polinomunda x'li terimin katsayısı = 32 + 9 = 41 bulunur.

19. 6 kız ve 7 erkek öğrencinin bulunduğu bir gruptan 2 temsilci seçiliyor.

Seçilen bu iki temsilciden birinin kız, diğerinin erkek olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{2}{13}$ D) $\frac{7}{13}$ E) $\frac{9}{13}$

Çözüm 19

$$\text{İstenen olasılık} = \frac{\binom{6}{1}.\binom{7}{1}}{\binom{13}{2}} = \frac{6.7}{\frac{13!}{11!.2!}} = \frac{42}{\frac{13.12}{2}} = \frac{7}{13} \text{ elde edilir.}$$

Not : $\textit{İstenen olasılık} = \dfrac{istenen \;\; \sec im \;\; sayisi}{tüm \;\; \sec im \;\; sayisi}$

20. $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ ve $w = c + di$ karmaşık sayıları için

$z + w$ toplamı ve $z.w$ çarpımı birer gerçel sayı olduğuna göre,

I. z ve w birbirinin eşleniğidir.

II. $z - w$ gerçeldir.

III. $z^2 + w^2$ gerçeldir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve III D) II ve III E) I, II ve III

Çözüm 20

$z = a + bi$ $(b \neq 0)$

$w = c + di$

$z + w = (a + bi) + (c + di)$

$z + w = (a + c) + (b + d)i \in$ gerçel sayı ise

Gerçel sayı, sanal kısmı sıfır olan bir karmaşık sayı olduğuna göre,

$(b + d)i = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -d$

$z.w = (a + bi).(c + di)$

$z.w = (a.c - b.d) + (a.d + b.c)i \in$ gerçel sayı ise

Gerçel sayı, sanal kısmı sıfır olan bir karmaşık sayı olduğuna göre,

$(a.d + b.c)i = 0 \quad \Rightarrow \quad a.d + b.c = 0$

$b = -d$ olduğuna göre,

$a.d - d.c = 0 \quad \Rightarrow \quad d.(a - c) = 0 \quad (b \neq 0)$

$\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad a = c$

$z = a + bi$ karmaşık sayısının eşleniği : $\bar{z} = a - bi = c + di = w$

$w = c + di$ karmaşık sayısının eşleniği : $\bar{w} = c - di = a + bi = z$

Buna göre, z ve w birbirinin eşleniğidir.

z ve w birbirinin eşleniği olduğuna göre,

$z - w = z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi)$

$\qquad\qquad = (a - a) + (b + b)i$

$\qquad\qquad = 2bi \notin$ gerçel sayı

Buna göre, $z - w$ gerçel sayı değildir.

z ve w birbirinin eşleniği olduğuna göre,

$z = a + b\,i$

$w = a - b\,i$

$z^2 + w^2 = (a + b\,i)^2 + (a - b\,i)^2$

$\quad = a^2 + 2ab\,i - b^2 + a^2 - 2ab\,i - b^2$

$\quad = 2a^2 - 2b^2 \in$ gerçel sayı

Buna göre, $z^2 + w^2$ gerçeldir.

Not :

Karmaşık Sayıların Eşleniği

$z = a + b\,i$ karmaşık sayısı için $\bar{z} = a - b\,i$ sayısına z nin eşleniği denir.

Not :

$z = a + b\,i$ karmaşık sayısında,
a'ya z'nin gerçel (reel) kısmı, b'ye z'nin sanal (imajiner) kısmı denir ve
$\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$ olarak yazılır.

Not :

$z = a + b\,i$ sayısında $b = 0$ ise $z = a \in R$ dir.
Buna göre her gerçel sayı, sanal kısmı sıfır olan bir karmaşık sayıdır.
Bu nedenle $R \subset C$ dir.

21. Karmaşık sayılar kümesi üzerinde f fonksiyonu

$$f(z) = \sum_{k=0}^{101} z^k$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, $f(i)$ değeri nedir?

A) $1 + i$ B) $1 - i$ C) i D) $-i$ E) 1

Çözüm 21

$$f(z) = \sum_{k=0}^{101} z^k = z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + ...+ z^{99} + z^{100} + z^{101}$$

$$= 1 + z + z^2 + z^3 + ...+ z^{99} + z^{100} + z^{101}$$

$$= \frac{1 - z^{102}}{1 - z}$$

$$f(i) = \frac{1 - i^{102}}{1 - i} = \frac{1 - (i^2)^{51}}{1 - i}$$

$i^2 = -1$ olduğundan,

$$= \frac{1 - (-1)^{51}}{1 - i} = \frac{1 - (-1)}{1 - i} = \frac{1 + 1}{1 - i} = \frac{2}{1 - i}$$ bulunur.

Paydanın eşleniği pay ve paydayla çarpılırsa,

$$\frac{2}{1 - i} . \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{2.(1 + i)}{1 - i^2}$$

$$= \frac{2.(1 + i)}{1 - (-1)}$$

$$= \frac{2.(1 + i)}{1 + 1}$$

$$= \frac{2.(1 + i)}{2} = 1 + i$$ elde edilir.

Not :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1}$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \quad , \ \mathrm{x} \neq 1 \ , \ \mathrm{N}^+ \text{ için}$$

22. $\bar{z}$ ile z 'nin eşleniği gösterildiğine göre,

$z^2 = \bar{z}$ eşitliğini sağlayan ve argümenti $\frac{\pi}{2}$ ile π arasında olan sıfırdan farklı

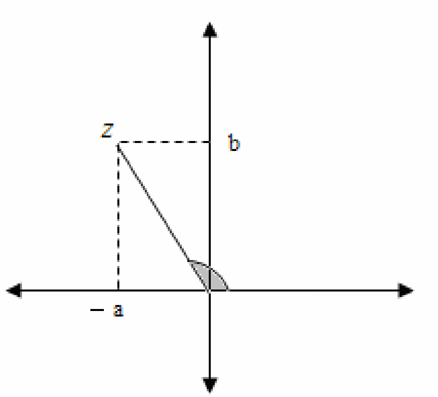
z karmaşık sayısı nedir?

A) $\frac{-1}{2} + \left(\sqrt{3}\right).i$ B) $\frac{-1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).i$ C) $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right).i$

D) $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).i$ E) $\frac{-\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right).i$

Çözüm 22

z karmaşık sayısının argümenti $\frac{\pi}{2}$ ile π arasında ise II. bölgededir.



$z = -\,a + b\,i$ olsun.

z nin eşleniği : $\overline{z} = -\,a - b\,i$

$z^2 = \overline{z}$

$(-\,a + b\,i\,)^2 = -\,a - b\,i$

$(-\,a)^2 - 2ab\,i - b^2 = -\,a - b\,i$

$a^2 - b^2 - 2ab\,i = -\,a - b\,i$

$-\,2ab\,i = -\,b\,i \quad \Rightarrow \quad 2a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$ bulunur.

$a^2 - b^2 = -\,a$ denkleminde a yerine $\frac{1}{2}$ yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - b^2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b^2 = \frac{1}{\underset{1}{4}} + \frac{1}{\underset{2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \quad \Rightarrow \quad b^2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ elde edilir.}$$

$z = -\,a + b\,i$ olduğuna göre, $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ olur.

23. $2^{2x} - 2.2^x - 8 = 0$ olduğuna göre, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 1 C) ln2 D) ln4 E) 2ln4

Çözüm 23

$2^{2x} - 2.2^x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2^x)^2 - 2.2^x - 8 = 0$

2^x = A olsun.

$A^2 - 2A - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - 4).(A + 2) = 0$

$\Rightarrow \quad A - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 4$

$\Rightarrow \quad A + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -2$ olamaz

$A = 2^x = 4 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^2$

Eşitlikte, tabanlar eşit olduğunda üslerde eşit olacağına göre, x = 2 olur.

24. $\log_9(x^2 + 2x + 1) = t \quad (x > -1)$ olduğuna göre,

x'in t türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3^t - 1$ B) 3^{t-1} C) $3 - 2^t$ D) $2 - 3^{t-1}$ E) $3^t - 2$

Çözüm 24

$\log_9(x^2 + 2x + 1) = t \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 9^t$

$\Rightarrow \quad (x+1)^2 = (3^2)^t$

$\Rightarrow \quad (x+1)^2 = 3^{2.t}$

$\Rightarrow \quad (x+1)^2 = (3^t)^2$

Eşitlikte, üsler eşit olduğunda tabanlarda eşit olacağına göre,

$x + 1 = 3^t \quad \Rightarrow \quad x = 3^t - 1$ olur.

25. $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{3} + 2\right)$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olan $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sin(x) - 6$ B) $2\sin(x) + 3$ C) $3\sin(x) - 6$ D) $\sin(2x - 6)$ E) $\sin(2x) - 3$

Çözüm 25

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{3} + 2\right)$$

$$y = \arcsin\left(\frac{x}{3} + 2\right) \quad \Rightarrow \quad \sin \ y = \sin \ \arcsin\left(\frac{x}{3} + 2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sin y = \frac{x}{3} + 2$$

$$\Rightarrow \quad \sin y - 2 = \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3\sin y - 6 = x$$

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}\ (y) = f^{-1}\ f(x) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) = x$$

$$\Rightarrow \quad 3\sin y - 6 = f^{-1}(y)$$

f^{-1} ters fonksiyonu için değişken x ve x'in görüntüsü y ile gösterilirse,

$\Rightarrow \quad 3\sin(x) - 6 = f^{-1}(x)$ elde edilir.

26. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ fonksiyonunun grafiği a birim sağa ve b birim aşağı ötelenerek $g(x) = x^2 - 8x + 14$ fonksiyonunun grafiği elde ediliyor.

Buna göre, $|a| + |b|$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm 26

I. Yol

$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = (x - 1)^2 + 2$

$g(x) = x^2 - 8x + 14 \quad \Rightarrow \quad g(x) = (x - 4)^2 - 2$

$y = x^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin pozitif yönünde 1 birim ötelenirse,

$(x - 1)^2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

$y = x^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin pozitif yönünde 4 birim ötelenirse,

$(x - 4)^2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

Buna göre, a = 3 olur.

$(x - 1)^2$ fonksiyonunun grafiği y ekseninin pozitif yönünde 2 birim ötelenirse,

$(x - 1)^2 + 2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

$(x - 4)^2$ fonksiyonunun grafiği y ekseninin negatif yönünde $|-2|$ birim ötelenirse,

$(x - 4)^2 - 2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

Buna göre, b = 4 olur.

$|a| + |b| = 3 + 4 = 7$ elde edilir.

II. Yol

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ fonksiyonunun grafiği çizilirse,

Tepe noktası (r , k) olsun.

$$r = -\frac{(-2)}{2.1} \quad \Rightarrow \quad r = 1$$

$$k = f(r) \quad \Rightarrow \quad k = f(1) = 1 - 2 + 3 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

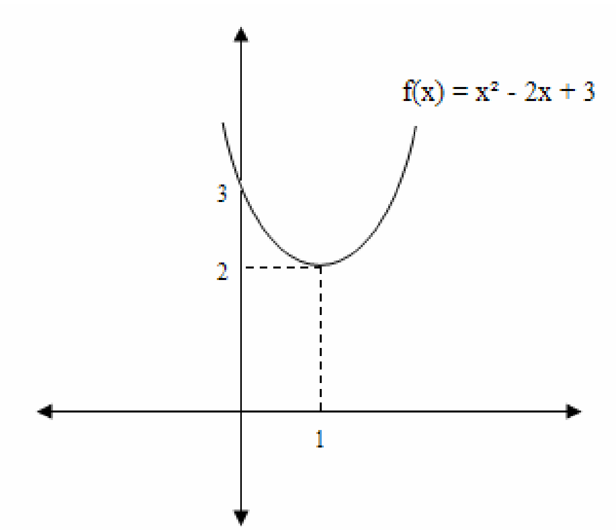
$(r , k) = (1 , 2)$

Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$x = 0$ için : $y = 3$

$y = 0$ için : $x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ gerçel kök yoktur.

Bu durumda eğri x eksenini kesmez.



$g(x) = x^2 - 8x + 14$ fonksiyonunun grafiği çizilirse,

Tepe noktası (r , k) olsun.

$$r = -\frac{(-8)}{2.1} \quad \Rightarrow \quad r = 4$$

$$k = f(r) \quad \Rightarrow \quad k = f(4) = 4^2 - 8.4 + 14 \quad \Rightarrow \quad k = -2$$

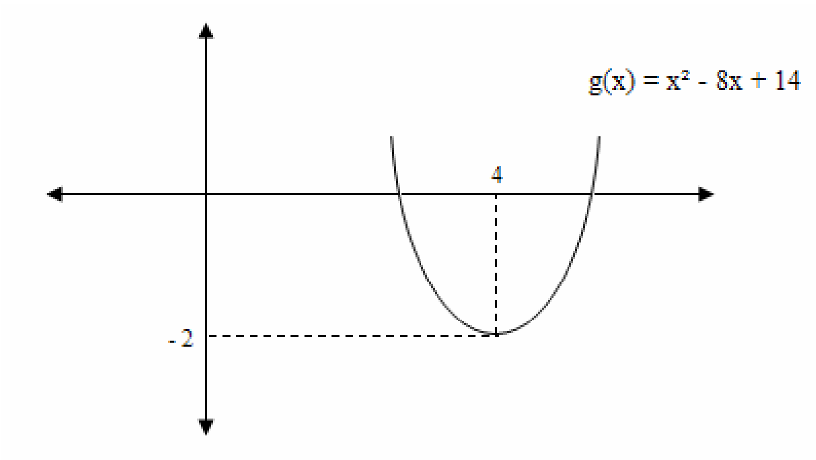
$(r , k) = (4 , -2)$

Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

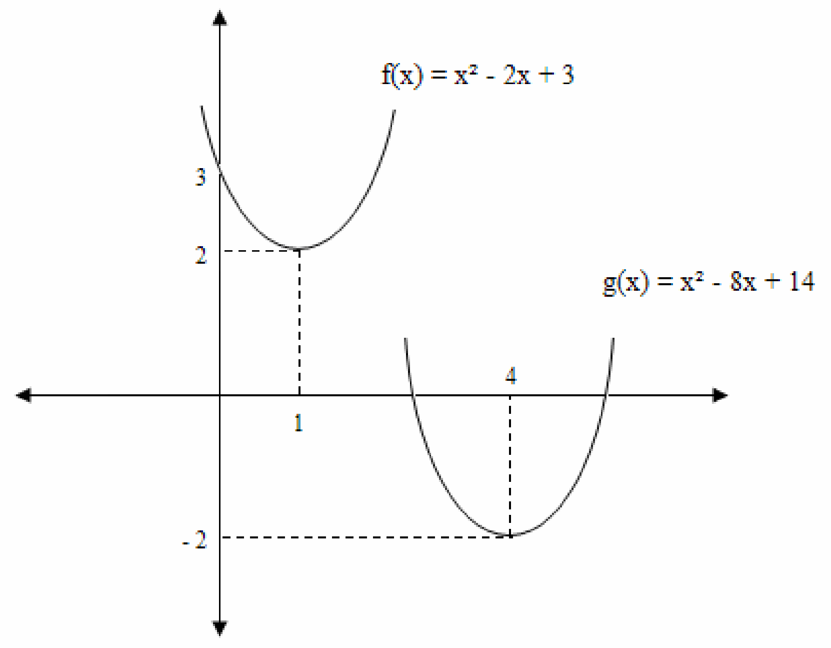
$x = 0$ için : $y = 14$

$y = 0$ için : $x^2 - 8x + 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-8)^2 - 4.1.14 = 8 > 0$

Buna göre, x eksenini iki noktada keser.



Sonuç olarak



f(x) = x² – 2x + 3 fonksiyonunun grafiği 3 birim sağa ve 4 birim aşağı ötelenerek g(x) = x² – 8x + 14 fonksiyonunun grafiği elde ediliyor.

Buna göre, $|a| + |b| = 3 + 4 = 7$ elde edilir.

Not :

$f: \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonun grafiğinin çizilmesi

– Tepe noktasının koordinatları bulunur.

– Eksenleri kestiği noktalar bulunur ve grafik çizilir.

Not :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki parabollerin

Tepe noktasının apsisi : $r = -\dfrac{b}{2a}$ dır.

Tepe noktasının ordinatı : $k = f(r)$ dir.

Not :

a , b , c birer reel (gerçel) sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$

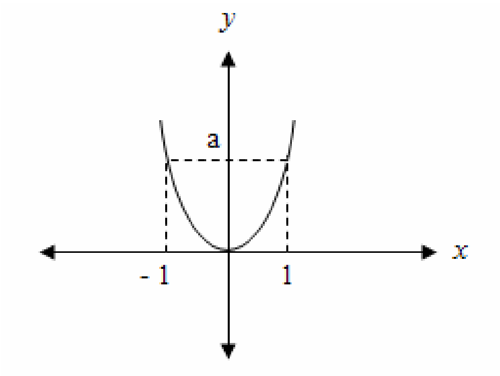
koşulu ile tanımlanan fonksiyonlara ikinci derece fonksiyonları denir.

$\mathrm{I} - f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$y = ax^2$ fonksiyonunun grafiği

x	$-\infty$	- 1	0	1	$+\infty$
y		a	0	a	

i)



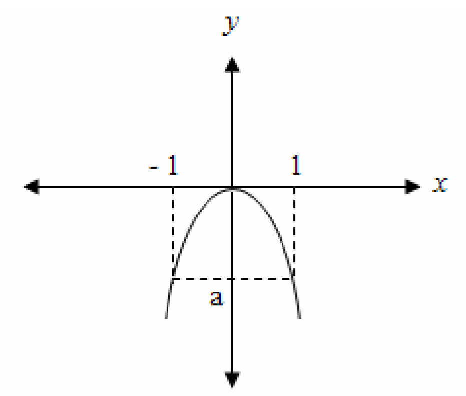
$a > 0$ ise

parabolün kolları y ekseninin pozitif yönündedir.

Fonksiyon en küçük değerini $x = 0$ da alır.

Fonksiyonun görüntü kümesi $f(R) = R^{+} \cup \{0\}$ dır.

ii)



$a < 0$ ise

parabolün kolları y ekseninin negatif yönündedir.

Fonksiyon en büyük değerini $x = 0$ da alır.

Fonksiyonun görüntü kümesi $f(R) = R^{-} \cup \{0\}$ dır.

$\text{II} - f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y = a.(x-r)^2$ fonksiyonunun grafiği

i) $r > 0$ ise $y = ax^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin pozitif yönünde r birim ötelenir.

ii) $r < 0$ ise $y = ax^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin negatif yönünde $|r|$ birim ötelenir.

$\text{III} - f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = a.(x-r)^2 + k$ fonksiyonunun grafiği

Önce $y = ax^2$ fonksiyonunu grafiği, sonra $y = a.(x-r)^2$ grafiği çizilir.

$y = a.(x-r)^2$ nin grafiği

i) $k > 0$ ise y ekseninin pozitif yönünde k birim kadar ötelenir.

ii) $k < 0$ ise y ekseninin negatif yönünde $|k|$ birim kadar ötelenir.

$\text{IV} - f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği

Bu tür fonksiyonları $f(x) = a.(x-r)^2 + k$ biçimine getirerek grafiğini çizeriz.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a.\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a.\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + c \\
&= a.\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

$r = -\dfrac{b}{2a}$ ve $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ alınırsa, $f(x) = a.(x-r)^2 + k$ olur.

27. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere

$\cot x - 3\tan x = \dfrac{1}{\sin 2x}$ olduğuna göre, $\sin^2 x$ kaçtır?

A) $\dfrac{1}{9}$ B) $\dfrac{1}{8}$ C) $\dfrac{1}{7}$ D) $\dfrac{1}{5}$ E) $\dfrac{1}{4}$

Çözüm 27

$$\cot x - 3\tan x = \frac{1}{\sin 2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos x}{\sin x} - 3\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos x}{\underset{\cos x}{\sin x}} - \frac{3\sin x}{\underset{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos^2 x}{\sin x.\cos x} - \frac{3\sin^2 x}{\cos x.\sin x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos^2 x - 3\sin^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ olduğuna göre,

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - \sin^2 x - 3\sin^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$ olduğuna göre,

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - 4\sin^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{2.\sin x.\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - 4\sin^2 x}{1} = \frac{1}{2}$$

İçler – dışlar çarpımı yapılırsa,

$2 - 8\sin^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad 8\sin^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \dfrac{1}{8}$ bulunur.

28. $\cos x = \frac{-4}{5}$ olduğuna göre, cos2x kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{12}{13}$ D) $\frac{24}{25}$ E) $\frac{7}{25}$

Çözüm 28

$\cos x = \frac{-4}{5}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

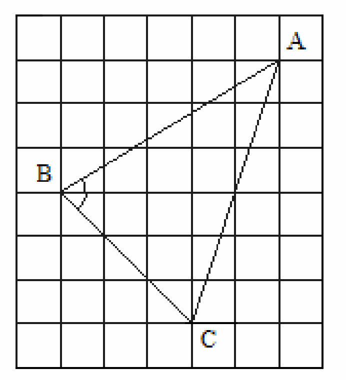
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ olduğuna göre,

$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = 2.\cos^2 x - 1$ olur.

$\cos x = \frac{-4}{5}$ olduğuna göre,

$\cos 2x = 2.\left(\frac{-4}{5}\right)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = \frac{32}{25} - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = \frac{7}{25}$ elde edilir.

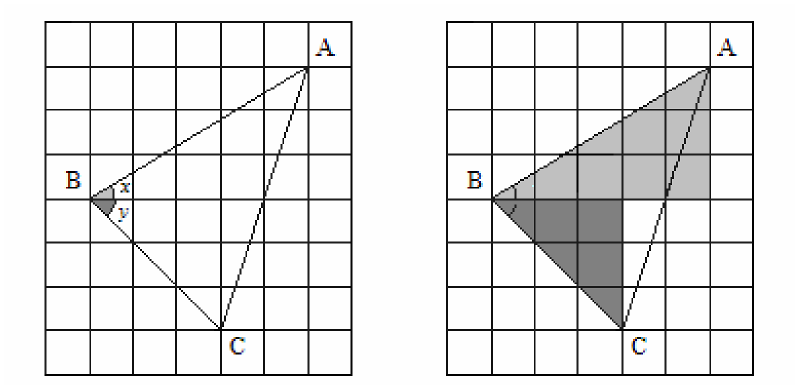
29.



Birim kareler üzerine çizilmiş yukarıdaki ABC üçgeninin B açısının tanjantı kaçtır?

A) $\frac{25}{4}$ B) $\frac{34}{5}$ C) $\frac{40}{9}$ D) 4 E) 5

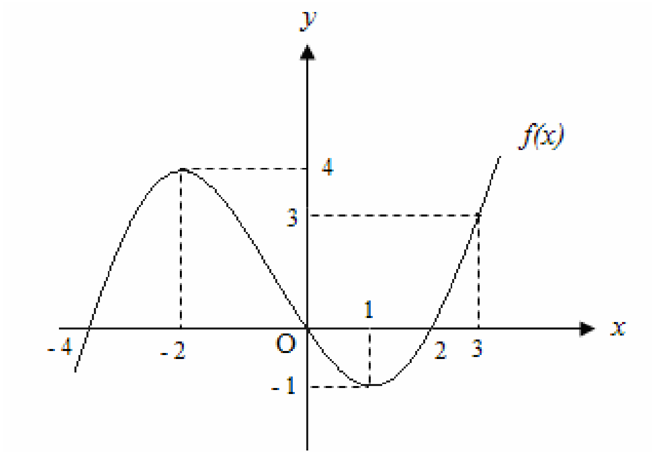
Çözüm 29



$$\tan B = \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x.\tan y}$$

$$= \frac{\frac{3}{5}+\frac{3}{3}}{1-\frac{3}{5}.\frac{3}{3}} = \frac{\frac{3}{5}+1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{8}{5}.\frac{5}{2} = 4$$

30. Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$g(x) = 3 - f(x-2)$ olduğuna göre, $g(-2) + g(5)$ toplamı kaçtır?

A) – 3 B) – 1 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm 30

$x = -2$ için :

$g(-2) = 3 - f(-2-2) \quad \Rightarrow \quad g(-2) = 3 - f(-4)$

Grafiğe göre, $f(-4) = 0$ olduğundan, $g(-2) = 3 - 0 \quad \Rightarrow \quad g(-2) = 3$

$x = 5$ için :

$g(5) = 3 - f(5-2) \quad \Rightarrow \quad g(5) = 3 - f(3)$

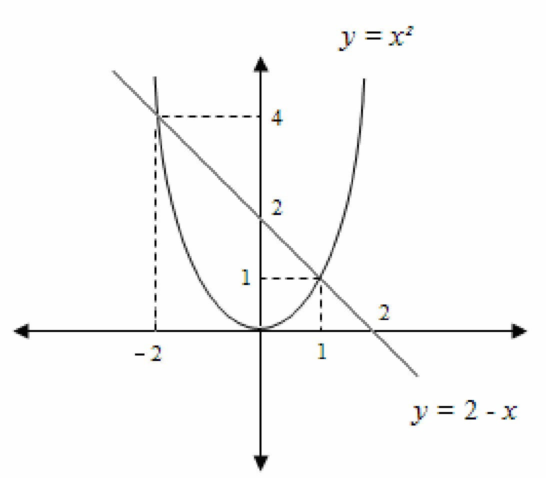
Grafiğe göre, $f(3) = 3$ olduğundan, $g(5) = 3 - 3 \quad \Rightarrow \quad g(5) = 0$

Buna göre, $g(-2) + g(5) = 3 + 0 = 3$ olur.

31. $y = x^2$ parabolü ile $y = 2 - x$ doğrusu arasında kalan sınırlı bölgenin sınırları üzerindeki (x , y) noktaları için $x^2 + y^2$ ifadesinin alabileceği <u>en büyük</u> değer kaçtır?

A) 25 B) 20 C) 17 D) 13 E) 10

Çözüm 31



$y = x^2$ parabolü ile $y = 2 - x$ doğrusunun kesişim noktalarını bulalım.

$x^2 = 2 - x \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x + 2).(x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

$\Rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$x = -2$ ise $y = (-2)^2 \quad \Rightarrow \quad y = 4$

$(x , y) = (-2 , 4)$

$x = 1$ ise $y = 1^2 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

$(x , y) = (1 , 1)$

$x^2 + y^2$ ifadesinin alabileceği en büyük değer : $(-2)^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$

32. $f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ parçalı fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 \ , & x \text{ rasyonelse} \\ x^2 \ , & x \text{ rasyonel değilse} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, $(fof)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3\sqrt{2}+2$ B) $\sqrt{2}+2$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

Çözüm 32

$$(fof)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ rasyonel olmadığına göre, $f(x) = x^2$ biçiminde olur.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$f\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\frac{1}{2}$ rasyonel olduğuna göre, $f(x) = 3x + 1$ biçiminde olur.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3.\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ bulunur.

33. f fonksiyonu $n \geq 1$ tam sayıları için $f(n) = 2.f(n-1)+1$ eşitliğini sağlıyor.

$f(0) = 1$ olduğuna göre, $f(2)$ kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm 33

$f(n) = 2.f(n-1)+1$

$n = 2$ için : $f(2) = 2.f(2-1)+1 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 2.f(1)+1$

$n = 1$ için : $f(1) = 2.f(1-1)+1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 2.f(0)+1$

$f(0) = 1$ olduğuna göre,

$f(1) = 2.1+1 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 3$

$f(2) = 2.3+1 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 7$ bulunur.

34. (a_k) dizisi

$a_1 = 40$

$a_{k+1} = a_k - k \quad (k = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ .\ .\ .\ )$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, a_8 terimi nedir?

A) 4 B) 7 C) 12 D) 15 E) 19

Çözüm 34

I. Yol

$a_1 = 40$

$a_{k+1} = a_k - k \quad (k = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ .\ .\ .\ )$

$k = 1$ için : $a_2 = a_1 - 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 40 - 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 39$

$k = 2$ için : $a_3 = a_2 - 2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 39 - 2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 37$

$k = 3$ için : $a_4 = a_3 - 3 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 37 - 3 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 34$

$k = 4$ için : $a_5 = a_4 - 4 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 34 - 4 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 30$

$k = 5$ için : $a_6 = a_5 - 5 \quad \Rightarrow \quad a_6 = 30 - 5 \quad \Rightarrow \quad a_6 = 25$

$k = 6$ için : $a_7 = a_6 - 6 \quad \Rightarrow \quad a_7 = 25 - 6 \quad \Rightarrow \quad a_7 = 19$

$k = 7$ için : $a_8 = a_7 - 7 \quad \Rightarrow \quad a_8 = 19 - 7 \quad \Rightarrow \quad a_8 = 12$ elde edilir.

II. Yol

$a_1 = 40$

$a_{k+1} = a_k - k \quad (k = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ .\ .\ .\ )$

$k = 1$ için : $a_2 = a_1 - 1$

$k = 2$ için : $a_3 = a_2 - 2$

$k = 3$ için : $a_4 = a_3 - 3$

$k = 4$ için : $a_5 = a_4 - 4$

$k = 5$ için : $a_6 = a_5 - 5$

$k = 6$ için : $a_7 = a_6 - 6$

$k = 7$ için : $a_8 = a_7 - 7$ taraf tarafa toplanırsa,

$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = a_1 - 1 + a_2 - 2 + a_3 - 3 + a_4 - 4 + a_5 - 5 + a_6 - 6 + a_7 - 7$

$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7$

$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$

$a_8 = a_1 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$

$a_1 = 40$ olduğuna göre,

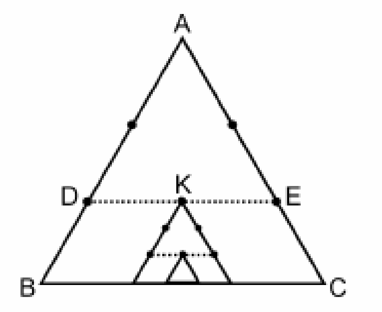
$$a_8 = 40 - \frac{7.(7+1)}{2}$$

$a_8 = 40 - 28$

$a_8 = 12$ elde edilir.

35. Bir kenar uzunluğu 1 birim olan ABC eşkenar üçgeninin AB ve AC kenarları üç eşit parçaya ayrılarak şekildeki gibi D ve E noktaları işaretleniyor.

DE doğru parçasının orta noktası K olmak üzere, bir köşesi K ve bu köşenin karşısındaki kenarı BC üzerinde olan yeni bir eşkenar üçgen çiziliyor ve aynı işlem çizilen yeni eşkenar üçgenlere de uygulanıyor.



Bu şekilde çizilecek iç içe geçmiş tüm üçgensel bölgelerin alanları toplamı kaç birim karedir?

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ D) $\frac{5\sqrt{3}}{16}$ E) $\frac{9\sqrt{3}}{32}$

Çözüm 35

I. Yol

Bir kenar uzunluğu a birim olan eşkenar üçgenin alanı : $a^2.\frac{\sqrt{3}}{4}$ ise

$$(1)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{1}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{\frac{1}{3}}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} + \ldots\ldots$$

$$1.\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{9}.\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{1}{9}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}.\left(1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\ldots\ldots\ldots\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{9}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{32} \text{ olur.}$$

II. Yol

$$a_1 = (1)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 . \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{9} . \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$r = \dfrac{a_2}{a_1}$ olduğuna göre, $r = \dfrac{\frac{1}{9}.\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{1}{9}$

$$\text{Toplam alan} = \frac{\sqrt{3}}{4} . \left(1 + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \dots\dots\dots\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} . \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{9}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} . \frac{9}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{32} \text{ olur.}$$

Not : Geometrik Dizi

Ardışık iki terimin oranı aynı olan dizilere geometrik dizi denir.

$r \in$ R olmak üzere her n $\in$ N$^+$ için $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ise (a_n) bir geometrik dizidir.

“r” ye dizinin ortak çarpanı denir.

Not : Geometrik Seri

$a_n = a.r^{n-1}$ geometrik dizisinde $|r| < 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a.r^{k-1} = a.(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{k-1} + \ldots) = a.\frac{1}{1-r} = \frac{a}{1-r} \text{ dir.}$$

36. $\prod_{n=1}^{7}(3n+2)$ sayısı 10^m ile tam bölünebildiğine göre,

m'nin alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm 36

$\prod_{n=1}^{7}(3n+2)$ sayısı 10^m ile tam bölünebildiğine göre,

çarpanları arasındaki 10 sayısının kuvvetleri bulunur.

$$\prod_{n=1}^{7}(3n+2) = (3.1 + 2).(3.2 + 2).(3.3 + 2).(3.4 + 2).(3.5 + 2).(3.6 + 2).(3.7 + 2)$$

$$= 5.8.11.14.17.20.23$$

$$= 5.2^3.11.2.7.17.2^2.5.23$$

$$= 2^6.5^2.7.11.17.23$$

$$= 2^4.2^2.5^2.7.11.17.23$$

$$= 2^4.10^2.7.11.17.23$$

Buna göre, $10^2 = 10^m$ olduğuna göre, m'nin alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri 2 olur.

37. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \arcsin x}{\sin 2x}$ limitinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{4}{3}$ E) $\dfrac{1}{6}$

Çözüm 37

I. Yol

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \arcsin x}{\sin 2x} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

L ' Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x + \arcsin x)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{2.\cos 2x} = \frac{1+1}{2.\cos 0} = \frac{2}{2.1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ bulunur.}$$

II. Yol

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\arcsin x}{\sin 2x}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\arcsin x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 2x}+\frac{\arcsin x}{\sin 2x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}+\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin 2x}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin f(x)}=1$ olduğuna göre,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}$$

Pay ve payda 2 ile çarpılırsa, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2.x}{2.\sin 2x}=\dfrac{1}{2}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}.1=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin 2x}$$

$\arcsin x=y$ olsun.

$\sin\ \arcsin x=\sin\ y \quad\Rightarrow\quad x=\sin y$

$x=0$ için : $\arcsin 0=y \quad\Rightarrow\quad y=0 \quad\Rightarrow\quad x\to 0$ ise $y\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin 2x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin(2\sin y)}$$

Pay ve payda $\dfrac{1}{2\sin y}$ ile çarpılırsa, $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\dfrac{y}{2\sin y}}{\dfrac{\sin(2\sin y)}{2\sin y}}$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{2\sin y}.\frac{2\sin y}{\sin(2\sin y)}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}.\frac{2\sin y}{\sin(2\sin y)}=\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}$$

Buna göre, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\arcsin x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$ elde edilir.

Not : L' Hospital Kuralı

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\dfrac{0}{0}$ veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği varsa , $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{/}(x)}{g^{/}(x)}$ olur.

38. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$ limitinin değeri kaçtır?

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{5}{2}$ D) 1 E) 2

Çözüm 38

I. Yol

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \to \infty} (\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{x^2})$$

$$= \lim_{x \to \infty} (|x+1| - |x|)$$

$$= \lim_{x \to \infty} (x + 1 - x)$$

$$= \lim_{x \to \infty} 1$$

$$= 1$$

II. Yol

x $\rightarrow +\infty$ için fonksiyonunun $\infty - \infty$ şeklinde bir belirsizliği vardır.

Pay ve payda köklü ifadenin eşleniği ile çarpılırsa

$$\left(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}\right).\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{x^2+2x+1-x^2-1}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2.\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2.\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{2x}{|x|..\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|..\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{2x}{x..\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+x..\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{.\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

x $\rightarrow +\infty$ için $\frac{2}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ ifadeleri sıfır olduğundan,

$$= \frac{2}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ elde edilir.}$$

Not :

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}.\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}$$

$$g(x) = \sqrt{a}.\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}$$ alınırsa

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)$ olur.

39. $f(x) = \sin^2(3x^2 + 2x + 1)$ olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

A) 2cos2 B) 2cos3 C) 6sin1 D) 4sin2 E) 2sin2

Çözüm 39

$f(x) = \sin^2(3x^2 + 2x + 1)$

$f'(x) = 2.\sin(3x^2 + 2x + 1).\cos(3x^2 + 2x + 1).(6x + 2)$

x = 0 için

$f'(0) = 2.\sin(0 + 0 + 1).\cos(0 + 0 + 1).(0 + 2)$

$f'(0) = 2.\sin 1.\cos 1.2$

$f'(0) = (\sin 2.1).2$

$f'(0) = 2\sin 2$

40. $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$

$f(0) = 2$

olduğuna göre, $f(-1)$ değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm 40

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$

$\int f'(x) = \int (3x^2 + 4x + 3)$

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + c$

$f(0) = 2$ olduğuna göre,

$x = 0$ için : $f(0) = 0 + 0 + 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 2$ elde edilir.

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

x = – 1 için : $f(-1) = (-1)^3 + 2.(-1)^2 + 3.(-1) + 2 \quad \Rightarrow \quad f(-1) = -1 + 2 - 3 + 2$

$\Rightarrow \quad f(-1) = 0$ olur.

41. $f(x) = 2x - 1$

$$g(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(g(x))}{x-2}$ limitinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{3}{2}$

Çözüm 41

I. Yol

$f(x) = 2x - 1$

$$g(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(g(x))}{x-2}$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right) = 2.\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right) - 1 = x - \frac{2}{x} - 1 = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(g(x))}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\dfrac{x^2 - x - 2}{x}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x.(x-2)}$$

$$= \frac{2^2 - 2 - 2}{2.(2-2)}$$

$$= \frac{0}{0} \text{ belirsizliği vardır.}$$

Bu durumda pay ve payda çarpanlarına ayrılıp sadeleştirme yapıldıktan sonra x = 2 yazılır.

Buna göre,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x.(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+1).(x-2)}{x.(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

II. Yol

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{x}\right) = 2.\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{x}\right)-1 = x-\frac{2}{x}-1 = \frac{x^2-x-2}{x}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(g(x))}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{x^2-x-2}{x}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x.(x-2)} = \frac{2^2-2-2}{2.(2-2)} = \frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır.

L ’ Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{x\to 2}\frac{[f(g(x))]^{/}}{(x-2)^{/}} = \lim_{x\to 2}\frac{f^{/}(g(x)).g^{/}(x)}{1}$$

$f(x) = 2x - 1$ verildiğine göre, $f^{/}(x) = 2$

$f^{/}(x) = 2$ sabit fonksiyon olduğuna göre, $f^{/}(g(x)) = 2$ olur.

$g(x) = \frac{x}{2}-\frac{1}{x}$ verildiğine göre, $g^{/}(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^{/}(g(x)).g^{/}(x)}{1} = \lim_{x\to 2}\frac{2.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\right)}{1} = 2.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right) = 2.\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$ bulunur.

veya

$$f(g(x)) = x-\frac{2}{x}-1$$

$$[f(g(x))]^{/} = \left(x-\frac{2}{x}-1\right)^{/} \quad\Rightarrow\quad [f(g(x))]^{/} = 1+\frac{2}{x^2}$$

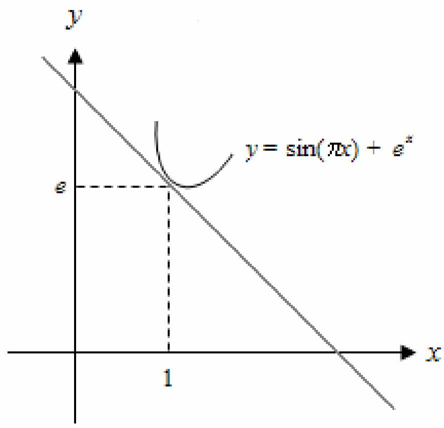
$$\lim_{x\to 2}\frac{[f(g(x))]^{/}}{(x-2)^{/}} = \lim_{x\to 2}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{1} = 1+\frac{2}{2^2} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$ bulunur.

42. $y = \sin(\pi x) + e^x$ eğrisine $x = 1$ değerinde çizilen teğetin y eksenini kestiği noktanın ordinatı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\pi$ B) -1 C) 0 D) $e - 1$ E) π

Çözüm 42

$y = \sin(\pi x) + e^x$



$x = 1$ ise

$y = \sin(\pi.1) + e^1 \quad \Rightarrow \quad y = 0 + e \quad \Rightarrow \quad y = e$

$(1 , e)$

$y = f(x) = \sin(\pi x) + e^x$

$f^{/}(1)$ = eğim

$y^{/} = \pi.\cos(\pi x) + e^x$

$f^{/}(1) = \pi.\cos(\pi.1) + e^1 \quad \Rightarrow \quad f^{/}(1) = \pi.(-1) + e \quad \Rightarrow \quad f^{/}(1) = e - \pi$

$(1 , e)$ ve eğim $= e - \pi$ ise

Bir noktası ve eğimi bilinen doğru denklemine göre,

$y - e = (e - \pi).(x - 1)$

y eksenini kestiği noktanın ordinatı

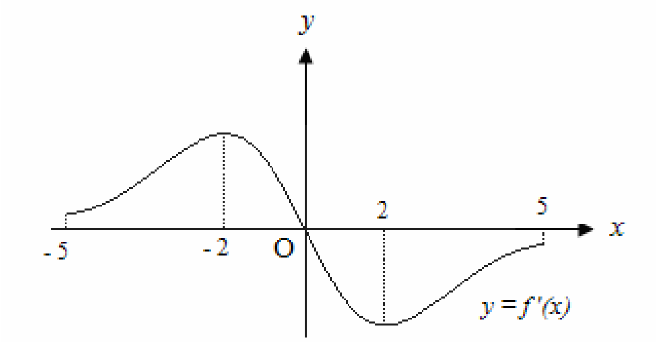
$x = 0$ için :

$y - e = (e - \pi).(0 - 1)$

$y - e = \pi - e$

$y = \pi$ bulunur.

43. Aşağıda, [– 5 , 5] aralığı üzerinde tanımlı f fonksiyonunun <u>türevinin grafiği</u> verilmiştir.



Bu grafiğe göre,

I. f fonksiyonu $x > 0$ için azalandır.

II. $f(-2) > f(0) > f(2)$ dir.

III. f fonksiyonunun $x = -2$ ve $x = 2$ değerlerinde yerel ekstremumu vardır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) I, II ve III

Çözüm 43

x		0
$f'(x)$	+ + +	– – –
$f(x)$	↗	↘

I. f fonksiyonu $x > 0$ için $f^{/}(x) < 0$ olduğundan azalandır.

II. Artan fonksiyon tanımına göre, $-2 < 0 \quad \Rightarrow \quad f(-2) < f(0)$

Azalan fonksiyon tanımına göre, $0 < 2 \quad \Rightarrow \quad f(0) > f(2)$ olmalıdır.

III. Türevli bir fonksiyonun bir noktada yerel ekstremumunun olması için
türevin bu noktada işaret değiştirmesi gerekir ve
türevli fonksiyonlarda yerel ekstremum noktasında türev sıfır olduğundan,

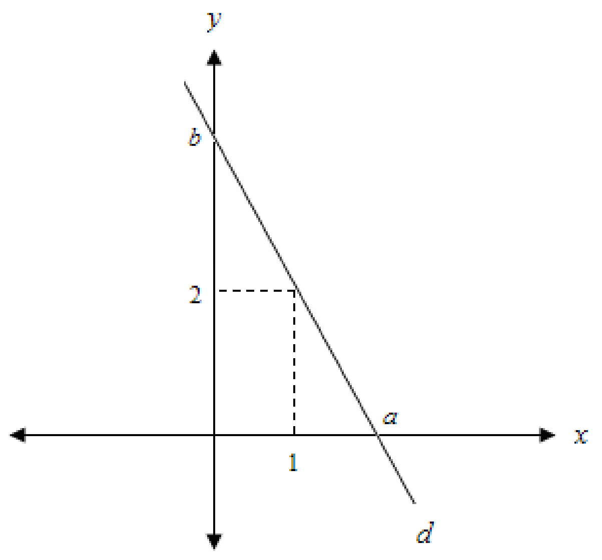
$f^{/}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ yerel ekstremum noktasıdır.

44. (1 , 2) noktasından geçen negatif eğimli bir *d* doğrusu ile koordinat eksenleri arasında kalan üçgensel bölgenin alanı <u>en az</u> kaç birim karedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) $\frac{9}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

Çözüm 44

I. Yol



Üçgensel bölgenin alanı = $\frac{a.b}{2}$

Şimdi, *a* ile *b* arasında bir bağıntı bulup alan ifadesini tek değişkene bağlı olarak yazalım.

d doğrusunun denklemi :

(*a* , 0) ve (0 , *b*) ise iki noktası bilinen doğru denkleminden

$$\frac{y-0}{0-b} = \frac{x-a}{0-a} \quad \Rightarrow \quad -a.y = -b.(x-a) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a}x - b$$

(1 , 2) noktası doğru üzerinde olduğundan,

$$2 = \frac{b}{a} - b \quad \Rightarrow \quad 2 = b.\left(\frac{1}{a} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{b} = \frac{1-a}{a} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2a}{a-1}$$

Üçgensel bölgenin alanı = $\dfrac{a.b}{2} = \dfrac{a.\left(\dfrac{2a}{a-1}\right)}{2} = \dfrac{a^2}{a-1}$

$S_{\min} = \dfrac{a^2}{a-1}$

Üçgensel bölgenin alanının en az (minimum) olması için $S' = 0$ olmalıdır.

$$S' = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a^2}{a-1}\right)' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2a.(a-1)-a^2}{(a-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a.(a-1)-a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a^2-2a-a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2-2a = 0$$

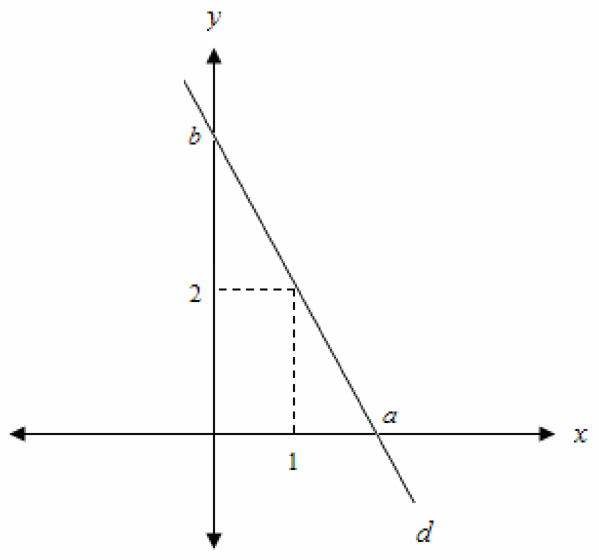
$$\Rightarrow \quad a.(a-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 2$$

$b = \dfrac{2a}{a-1}$ olduğuna göre, $b = \dfrac{2.2}{2-1} \quad \Rightarrow \quad b = 4$ olur.

Üçgensel bölgenin alanı = $S_{\min} = \dfrac{a.b}{2} = \dfrac{2.4}{2} = 4$ bulunur.

II. Yol



Üçgensel bölgenin alanı = $\dfrac{a.b}{2}$

Şimdi, a ile b arasında bir bağıntı bulup alan ifadesini tek değişkene bağlı olarak yazalım.

Benzerlikten,

$$\frac{a-1}{a}=\frac{2}{b} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{2a}{a-1}$$

Üçgensel bölgenin alanı = $\dfrac{a.b}{2} = \dfrac{a.\left(\dfrac{2a}{a-1}\right)}{2} = \dfrac{a^2}{a-1} \quad \Rightarrow \quad S = \dfrac{a^2}{a-1}$

Üçgensel bölgenin alanının en az olması için $S' = 0$ olmalıdır.

$$S^{/} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a^2}{a-1}\right)^{/} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2a.(a-1)-a^2}{(a-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a.(a-1)-a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a^2-2a-a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2-2a = 0$$

$$\Rightarrow \quad a.(a-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 2$$

$b = \dfrac{2a}{a-1}$ olduğuna göre, $b = \dfrac{2.2}{2-1} \quad \Rightarrow \quad b = 4$ olur.

Üçgensel bölgenin alanı = $S_{\min} = \dfrac{a.b}{2} = \dfrac{2.4}{2} = 4$ bulunur.

Not : İki noktası bilinen doğru denklemi

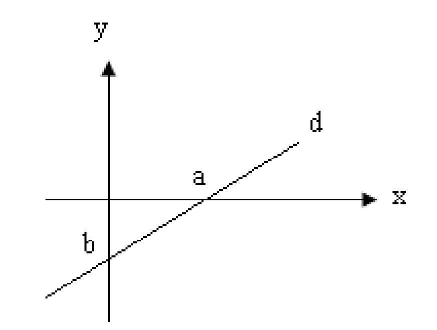
A(x_1 , y_1) ve B(x_2 , y_2) $\Rightarrow$ $\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

Not : İki noktası bilinen doğrunun eğimi

A(x_1 , y_1) ve B(x_2 , y_2) $\Rightarrow$ m = $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

Not : Doğrunun eksen parçaları türünden denklemi

(a , 0) ve (0 , b) noktalarından geçen doğrunun denklemi = $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$



45. Bir f fonksiyonunun grafiğinin $x = a$ değerindeki teğetinin eğimi 1,

$x = b$ değerindeki teğetinin eğimi ise $\sqrt{3}$ 'tür.

$f^{//}(x)$ ikinci türev fonksiyonu $[a\ ,\ b]$ aralığında sürekli olduğuna göre,

$\int_{b}^{a} f^{/}(x).f^{//}(x)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) -1 B) 1 C) 2 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

Çözüm 45

$f^{/}(a) = 1$

$f^{/}(b) = \sqrt{3}$

$\int_{b}^{a} f^{/}(x).f^{//}(x)\,dx$

$f^{/}(x) = u$ dönüşümü yapılırsa,

$f^{//}(x)\ dx\ =\ du$

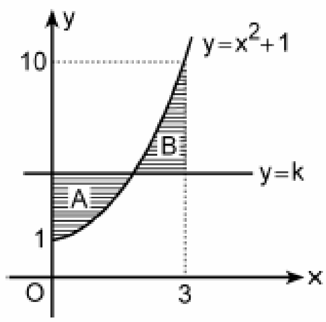
$x = a \quad \Rightarrow \quad u = f^{/}(a) \quad \Rightarrow \quad u = 1$

$x = b \quad \Rightarrow \quad u = f^{/}(b) \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{3}$

$$\int_{b}^{a} f^{/}(x).f^{//}(x)\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{1} u\ du\ = \left.\frac{u^2}{2}\right|_{\sqrt{3}}^{1}$$

$$= \frac{1^2}{2} - \frac{(\sqrt{3})^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ bulunur.}$$

46. Aşağıdaki grafikte, A ve B bölgelerinin alanları eşit olacak şekilde y = k doğrusu verilmiştir.

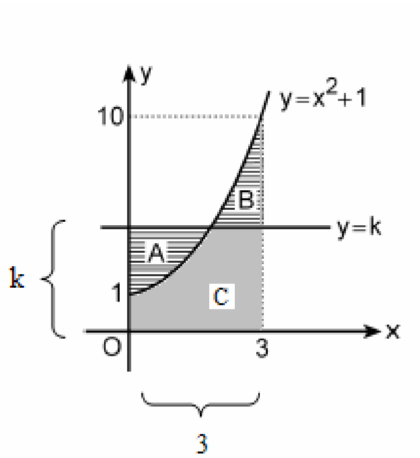


Buna göre, k'nin değeri kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{11}{2}$

Çözüm 46

I. Yol



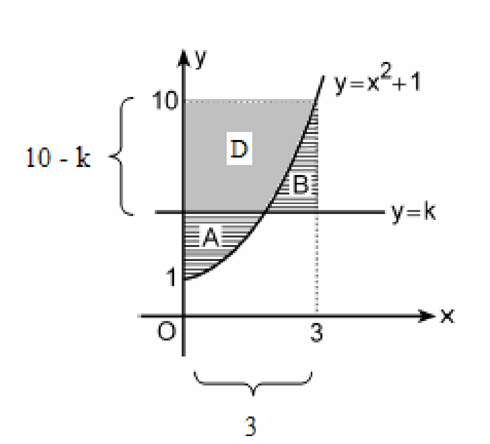
A = B olduğuna göre, A + C = B + C

A + C = 3.k

$$B + C = \int_0^3 (x^2+1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{3^3}{3}+3\right)-\left(\frac{0}{3}+0\right) = 12$$

A + C = B + C olduğuna göre, 3.k = 12 $\Rightarrow$ k = 4 elde edilir.

II. Yol



A = B olduğuna göre, A + D = B + D

B + D = 3.(10 – k)

$y = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y-1}$

$$A + D = \int_1^{10} \sqrt{y-1}\; dy = \int_1^{10} (y-1)^{\frac{1}{2}}\; dy$$

$$= \left.\frac{(y-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^{10} = \left.\frac{(y-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^{10} = \left.\frac{2\sqrt{(y-1)^3}}{3}\right|_1^{10} = \left.\frac{2(y-1)\sqrt{y-1}}{3}\right|_1^{10}$$

$$= \left(\frac{2(10-1)\sqrt{(10-1)}}{3}\right) - \left(\frac{2(1-1\sqrt{1-1})}{3}\right) = \left(\frac{2.9.\sqrt{9}}{3}\right) - 0 = 18$$

A + D = B + D olduğuna göre,

$18 = 3.(10 - k) \quad \Rightarrow \quad 10 - k = 6 \quad \Rightarrow \quad k = 4$ olur.

47. $\int_1^e \ln^3 x\,dx = 6 - 2e$ olduğuna göre, $\int_1^e \ln^4 x\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) $7e - 16$ B) $8e - 18$ C) $9e - 24$ D) $10e - 26$ E) $11e - 28$

Çözüm 47

I. Yol

$$\int_1^e \ln^4 x\,dx$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$$\ln^4 x = u \quad \Rightarrow \quad (\ln^4 x)' = (u)' \quad \Rightarrow \quad 4.\ln^3 x.\frac{1}{x}dx = du$$

$$dx = dv \quad \Rightarrow \quad \int dx = \int dv \quad \Rightarrow \quad x = v$$

$$\int_1^e \ln^4 x\,dx = x.\ln^4 x - \int_1^e x.4\ln^3 x.\frac{1}{x}dx$$

$$= x.\ln^4 x \Big|_1^e - 4\int_1^e \ln^3 x\,dx$$

$$= (e.\ln^4 e - 1.\ln^4 1) - 4\int_1^e \ln^3 x\,dx$$

$\int_1^e \ln^3 x\,dx = 6 - 2e$ olduğuna göre,

$$= (e.1 - 1.0) - 4.(6 - 2e)$$

$$= e - 24 + 8e$$

$= 9e - 24$ elde edilir.

II. Yol

$\int_1^e \ln^4 x\,dx$ değişken değiştirerek integrali alınırsa,

$\ln x = t \quad \Rightarrow \quad e^t = x$

$\Rightarrow \quad (e^t)' = x' \quad \Rightarrow \quad e^t dt = dx$

x = e $\quad \Rightarrow \quad \ln e = t \quad \Rightarrow \quad t = 1$

x = 1 $\quad \Rightarrow \quad \ln 1 = t \quad \Rightarrow \quad t = 0$

$$\int_1^e \ln^4 x\,dx = \int_0^1 t^4\ e^t dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$t^4 = u \quad \Rightarrow \quad (t^4)' = u' \quad \Rightarrow \quad 4t^3 dt = du$

$e^t dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$

$$\int_0^1 t^4 e^t dt = e^t.t^4 - \int_0^1 e^t 4t^3 dt = e^t.t^4 - 4\int_0^1 e^t t^3 dt$$

Verilen $\int_1^e \ln^3 x\ dx$ integralide t değişkenine göre düzenlenirse,

$\int_1^e \ln^3 x\ dx = \int_0^1 t^3 e^t dt = 6 - 2e$ olacağına göre,

$$\int_0^1 t^4\ e^t dt = e^t.t^4 - 4\int_0^1 t^3 e^t dt$$

$$= e^t.t^4 \Big|_0^1 - 4.(6 - 2e) = (e - 0) - 24 + 8e = 9e - 24$$

III. Yol

$\int_1^e \ln^4 x\, dx$ değişken değiştirerek integrali alınırsa,

$\ln x = t \quad \Rightarrow \quad e^t = x$

$\Rightarrow \quad (e^t)^/ = x^/ \quad \Rightarrow \quad e^t dt = dx$

x = e $\quad \Rightarrow \quad \ln e = t \quad \Rightarrow \quad t = 1$

x = 1 $\quad \Rightarrow \quad \ln 1 = t \quad \Rightarrow \quad t = 0$

$$\int_1^e \ln^4 x\, dx = \int_0^1 t^4 \; e^t dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$t^4 = u \quad \Rightarrow \quad (t^4)^/ = u^/ \quad \Rightarrow \quad 4t^3 dt = du$

$e^t dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$

$$\int_0^1 t^4 \; e^t dt \; = \; e^t . t^4 - \int_0^1 e^t \, 4t^3 dt \; = \; e^t . t^4 - 4\int_0^1 e^t t^3 dt$$

$$\int_0^1 e^t t^3 dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$t^3 = u \quad \Rightarrow \quad (t^3)^/ = u^/ \quad \Rightarrow \quad 3t^2 dt = du$

$e^t dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$

$$\int_0^1 t^3 e^t dt \; = \; e^t . t^3 - \int_0^1 e^t \, 3t^2 dt \; = \; e^t . t^3 - 3\int_0^1 e^t t^2 dt$$

$$\int_0^1 e^t t^2 dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$$t^2 = u \quad \Rightarrow \quad (t^2)^/ = u^/ \quad \Rightarrow \quad 2t\ dt = du$$

$$e^t dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$$

$$\int_0^1 t^2 e^t dt = e^t.t^2 - \int_0^1 e^t 2t\ dt = e^t.t^2 - 2\int_0^1 e^t t\ dt$$

$$\int_0^1 e^t t\ dt$$

Kısmi (parçalı) integrasyon uygulanırsa,

$$t = u \quad \Rightarrow \quad (t)^/ = u^/ \quad \Rightarrow \quad dt = du$$

$$e^t dt = dv \quad \Rightarrow \quad \int e^t dt = \int dv \quad \Rightarrow \quad e^t = v$$

$$\int_0^1 te^t dt = e^t.t - \int_0^1 e^t dt = e^t.t - e^t$$

Buna göre, $\int_1^e \ln^4 x\,dx = \int_0^1 t^4\ e^t dt\ =\ e^t.t^4\ -4\int_0^1 e^t t^3 dt$

$\int_0^1 t^3 e^t dt\ =\ e^t.t^3\ -3\int_0^1 e^t t^2 dt$ olduğuna göre,

$$=\ e^t.t^4\ -4.\left(e^t.t^3\ -3\int_0^1 e^t t^2 dt\right)$$

$\int_0^1 t^2 e^t dt\ =\ e^t.t^2\ -2\int_0^1 e^t t\ \ dt$ olduğuna göre,

$$=\ e^t.t^4\ -4.\left(e^t.t^3\ -3.\left(e^t.t^2\ -2\int_0^1 e^t t\ \ dt\right)\right)$$

$\int_0^1 e^t t\ \ dt\ =\ e^t.t - e^t$ olduğuna göre,

$=\ e^t.t^4\ -4.\left(e^t.t^3\ -3.\left(e^t.t^2\ -2.\left(e^t.t - e^t\right)\right)\right)$ elde edilir.

$$=\ e^t.t^4\ -4.\left(e^t t^3\ -3.\left(e^t.t^2\ -2.\left(e^t t - e^t\right)\right)\right)$$

$$=\ e^t.t^4\ -4.\left(e^t t^3\ -3.\left(e^t.t^2\ -2.e^t t + 2e^t\right)\right)$$

$$=\ e^t.t^4\ -4.\left(e^t t^3\ -3.e^t.t^2\ +6.e^t t - 6e^t\right)$$

$=\ e^t.t^4\ -4.e^t t^3\ +12.e^t.t^2\ -24.e^t t + 24e^t$ olur.

Sonuç olarak

$$\int_0^1 t^4\ e^t dt\ =\ e^t.(t^4\ -4t^3\ +12t^2\ -24t + 24)\ \Big|_0^1$$

$$=\ (e^1.(1^4\ -4.1^3\ +12.1^2\ -24.1 + 24)) - (e^0.(24))\ = e.(1 - 4 + 12 - 24 + 24) - 24$$

$= 9e - 24$ bulunur.

Not : Kısmi (parçalı) integrasyon yöntemi

İki fonksiyonun çarpımının integralinin hesaplanmasında
genelde, kısmi integrasyon yöntemi kullanılır.

$u(x)$ ve $v(x)$ türevlenebilir fonksiyonlar ise çarpımın türevi formülüne göre,

$(u.v)' = u'.v + v'.u$ yazarız.

Her iki tarafı dx ile çarpıp integrallersek, $\int (u.v)'\,dx = \int u'.v\,dx + \int v'.u\,dx$ bulunur.

Belirsiz integralin tanımından, $\int (u.v)'\,dx = u.v$ yazılabilir.

Bunu dikkate alarak, $u.v = \int u.v'\,dx + \int v.u'\,dx$ formülünü elde ederiz.

$u' = \dfrac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad u'\,dx = du$,

$v' = \dfrac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad v'\,dx = dv$ olduğundan,

$u.v = \int u\,dv + \int v\,du \quad \Rightarrow \quad \int u\,dv = u.v - \int v\,du$ elde edilir.

48. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ integralinde $u=\sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa

aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?

A) $\int \ln u\;du$ B) $\int 2\ln u\;du$ C) $\int \frac{\ln u}{u}\,du$ D) $\int \frac{\ln u}{2u}\,du$ E) $\int u\ln u\;du$

Çözüm 48

$u=\sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa,

$$u' = (\sqrt{x})' \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad 2u\;du = dx$$

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\ln u}{u}\,2u\;du$$

$$= \int 2\ln u\;du$$ elde edilir.

49. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

Buna göre, $\det(A^2 - B^2)$ kaçtır?

A) – 4 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

Çözüm 49

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+1.0 & 1.1+1.1 \\ 0.1+1.0 & 0.1+1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = B \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+0.1 & 1.0+0.1 \\ 1.1+1.1 & 1.0+1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-0 \\ 0-2 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^2 - B^2) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.0 - (-2).2 = 4 \text{ bulunur.}$$

50. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $x + y$ kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm 50

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.x + 2.y \\ -1.x + 3.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ -x + 3y \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x + 2y \\ -x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$ olduğuna göre,

x + 2y = 1

– x + 3y = 9

5y = 10 $\Rightarrow$ y = 2

$\Rightarrow$ x = – 3

Buna göre, x + y = – 3 + 2 = – 1 elde edilir.

Adnan ÇAPRAZ

adnancapraz@yahoo.com

AMASYA