Züğürt Tesellisi

Ali Nesin

Bir önceki yazıda, yazı-tura oyununda yoksulun zengine karşı şansının çok az olduğunu kanıtlamıştık. Öyle ki, zengin sonsuz zengin olduğunda oyunu 1 olasılıkla (yani yüzde yüz) kazanacaktır. Bu yazıda bu olgudan güzel bir eşitlik çıkaracağız[1]:

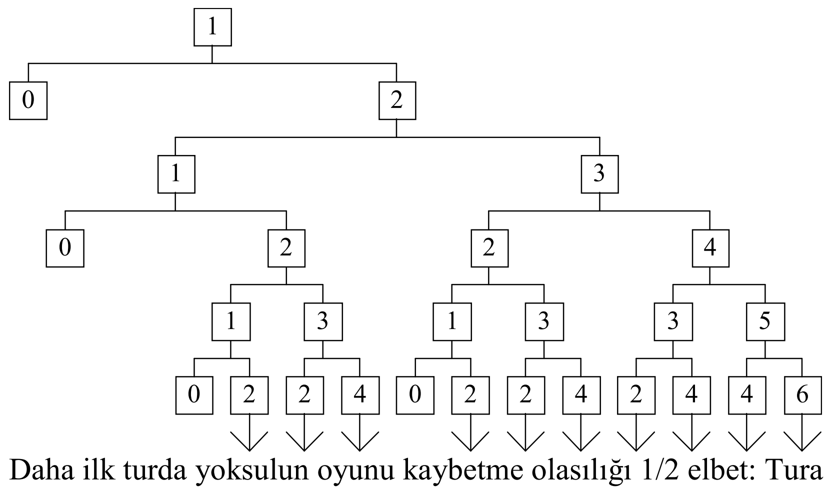
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)4^k} \binom{2k}{k} = 1$$

Basit bir yazı-tura oyunundan ilginç bir matematiksel eşitliğin çıkması çok hoşuma gitti.

Yoksulun cebinde 1 lira olduğunu varsayalım. Zenginin de sonsuz zengin olsun, yani sonsuz parası olsun. Dolayısıyla zenginin parası bitmez ve zengin oyunu kaybedemez. Yoksulun tek şansı sonsuza değin oynayabilmek. Bunun da olasılığının sıfır olduğunu daha önceki yazımızdan biliyoruz.

Birinci yazı-tura atıldı. Tura gelirse yoksulun cebindeki tek lira gidecek, beş parasız kalacak ve oyun bitecek. Diyelim ilk oyunu yoksul kazandı. Şimdi cebinde iki lirası var. İkinci oyunda kaybederse gene 1 lirası kalacak, kazanırsa 3 lirası olacak. Oyun böylece, sürebildiğince, yani yoksulun parası olduğu sürece sürecek.

Oyunun alabileceği bütün durumları bir "ağaç"la gösterebiliriz. Ağacın en tepesine 1 yazalım. Bu 1, yoksulun oyuna başlamadan önceki bütün serveti. 1'den sonra aşağıya doğru sağlı sollu iki ok (kök) çıkaralım. Bu oklardan soldakinin ucuna 0, sağdakinin ucuna 2 yazalım. Soldaki ok, yoksulun kaybettiğini, sağdakiyse kazandığını gösteriyor. 0 ve 2 sayıları da, birinci yazı-tura atışının sonunda yoksulun cebindeki para: Kaybederse 0, kazanırsa 2 lirası olacak. Kaybettiğinde oyun bitiyor, dolayısıyla 0'dan sonra kök büyümüyor. Kazanmışsa, yani 2 lirası olmuşsa oyun sürüyor. 2'den sonra kök büyüyor, ikiye ayrılıyor. Soldaki kök her zaman yoksulun kaybettiğini gösterecek, sağdakiyse kazandığını. Oyun sonsuza dek uzayabileceğinden, ağacın kökleri sonsuza dek uzar. Bu sonsuz ağaçtan bir bölüm sunalım:



Daha ilk turda yoksulun oyunu kaybetme olasılığı 1/2 elbet: Tura gelirse kaybedecek.

---

[1] $\binom{n}{k}$ sayılarını, *Pokerin Matematiği* adlı yazıda, sayfa 34'te tanımlamıştık.

Yoksul, ilk turda kaybetmemişse, ikinci turda elenemez, çünkü yukardaki ağacın üstten üçüncü katında 0 yok. Ama üçüncü turda elenebilir. Eğer sırasıyla yazı–tura–tura (YTT) gelirse yoksul üçüncü tur sonunda beş parasız kalacaktır. Sırasıyla yazı–tura–tura (yani YTT) gelme olasılığıysa $1/2^3$, yani 1/8'dir. Demek ki yoksulun üçüncü turda elenme olasılığı 1/8.

Birinci turda elenme olasılığı da 1/2'ydi.

Bu olasılıkları toplarsak, yoksulun üç tur dayanamama olasılığını buluruz: 1/2 + 1/8 = 5/8.

Yoksul ilk üç tur dayanabilmişse, dördüncü turu oynamaya hak kazanır. Bu turda elenemez, çünkü en az 1 lirası kalacaktır. Ancak beşinci turda elenebilir. Sırasıyla YTYTT ya da YYTTT gelirse beşinci turda elenecektir.

$n \geq 1$ herhangi bir doğal sayı olsun. Yukardaki ağacın (üstten) n inci katında kaç tane 0, kaç tane 1, kaç tane 2 vardır? Bu sayılara $p_n(0)$, $p_n(1)$, $p_n(2)$ diyelim. Genel olarak, $0 \leq k \leq n$ ise

$$p_n(k) = \text{Ağacın } n \text{ inci katındaki } k \text{ sayısı}$$

olsun. Örneğin,

$p_1(0) = 0$ $p_1(1) = 1$

$p_2(0) = 1$ $p_2(1) = 0$ $p_2(2) = 1$

$p_3(0) = 0$ $p_3(1) = 1$ $p_3(2) = 0$ $p_3(3) = 1$

$p_4(0) = 1$ $p_4(1) = 0$ $p_4(2) = 2$ $p_4(3) = 0$ $p_4(4) = 1$

$p_5(0) = 0$ $p_5(1) = 2$ $p_5(2) = 0$ $p_5(3) = 3$ $p_5(4) = 0$ $p_5(5) = 1$

Bu sayıları nasıl bulabiliriz? Örneğin $p_6(4)$'ü ağaca bakmadan bulabilir miyiz? $p_6(4)$, ağacın altıncı katındaki 4'lerin sayısı. Altıncı kattaki 4 sayıları bir üst kattaki 3 ve 5 sayılarından gelir; dolayısıyla,

$$p_6(4) = p_5(3) + p_5(5) = 3 + 1 = 4$$

eşitliği geçerlidir. Bunun gibi, her $2 \leq k < n$ için

$$p_n(k) = p_{n-1}(k-1) + p_{n+1}(k+1) \qquad (1)$$

eşitliği geçerlidir. Çünkü n inci sıradaki k'lar ancak $n-1$ inci sıradaki $k-1$ ve $k+1$'lerden gelebilirler.

$p_n(0)$ ve $p_n(1)$ sayıları için formülümüz değişik. n inci sıradaki 0 sayıları, $n-1$ inci sıradaki 1 sayılarından gelebilir ancak. Bunun gibi, n inci sıradaki 1 sayıları bir önceki sıradaki 2 sayılarından gelebilir[2]. Dolayısıyla,

$$p_n(0) = p_{n-1}(1) = p_{n-2}(2) \qquad (2)$$

eşitlikleri geçerlidir.

$$p_n(n) = 1 \qquad (3)$$

eşitliğini bulmak da zor değildir. Yukardaki eşitlikleri kullanarak bir tablo çizelim (Bu tabloda $p_n(k)$ sayısını n inci sırayla k inci kolonun kesiştiği yere koyduk):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1											
2	1		1										
3		1		1									

[2] Bir önceki sırada 0 varsa, oyun orada bitmiştir.

4	1		2		1								
5		2		3		1							
6	2		5		4		1						
7		5		9		5		1					
8	5		14		14		6		1				
9		14		28		20		7		1			
10	14		42		48		27		8		1		
11		42		90		75		35		9		1	
12	42		132		165		110		44		10		1

Oyunun ikinci katta (yani birinci atıştan hemen sonra) bitme olasılığı 1/2, bunu daha önce de görmüştük.

Oyun tek sayılı katlarda bitemez, çünkü tek sayılı katlarda 0 yok. Oyun ancak çift sayılı katlarda bitebilir.

Dördüncü katta bir tek 0 var. Dolayısıyla oyunun dördüncü katta (yani üçüncü atışta) bitme olasılığı $1/2^3$.

Altıncı katta iki tane 0 var. Her sıfır için olasılık $1/2^5$, dolayısıyla oyunun altıncı katta bitme olasılığı $2/2^5$.

Sekizinci katta beş tane 0 var. Her sıfır için olasılık $1/2^7$, dolayısıyla oyunun sekizinci katta bitme olasılığı $5/2^7$.

Genel olarak oyunun $2n$ inci katta bitme olasılığı

$$p_{2n}(0)/2^{2n-1}$$

dir. Demek ki oyunun $2n$ inci katta ve daha önce bitme olasılığı,

$$p_2(0)/2,\ p_4(0)/2^3,\ \ldots,\ p_{2n}(0)/2^{2n-1}$$

sayılarının toplamı, yani

$$\sum_{k=1}^{n} p_{2k}(0)/2^{2k-1}$$

dir. Dolayısıyla oyunun sonlu bir aşamada bitme olasılığını bulmak için yukardaki eşitlikte $n = \infty$ almak gerekiyor (yani n'yi sonsuza götürmek.) Demek ki oyunun sonlu bir aşamada bitme olasılığı

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{2k}(0)/2^{2k-1}$$

dir. Biz bu sayının 1 olduğunu biliyoruz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{2k}(0)/2^{2k-1} = 1 \qquad (4)$$

$p_{2k}(0)$ sayıları kaçtır? Bu sayıların bir formülünü bulursak ve bu formülü (4) eşitliğine yerleştirsek, (4) eşitliği ilginç bir eşitlik olur mu? Evet olur! $p_{2k}(0)$ sayılarını bulalım.

$p_{2n}(0)$ sayılarını bulmak için, her $0 \leq k \leq n$ için, $p_{2n}(2k)$ sayısını bulmalıyız. Yukardaki tablodaki tek sayılı sıraları ve kolonları atalım ki dikkatimizi $p_{2n}(2k)$ sayılarına tam olarak verebilelim:

			0		2		4		6		8		1		1		1		1
												0		2		4		6	
	2		1		1														
	4		1		2		1												
	6		2		5		4		1										
	8		5		1		1		6		1								
				4		4													
	1		1		4		4		2		8		1						
0		4		2		8		7											
	1		4		1		1		1		4		1		1				
2		2		32		65		10		4		0							
	1		1		4		5		4		2		6		1		1		
4		32		29		72		29		08		5		2					
	1		4		1		2		1		9		3		9		1		1
6		29		430		002		638		10		50		0		4			

Yukardaki tabloya uzun süre, ama oldukça uzun bir süre bakarsanız, $p_{2n}(2k)$ sayılarını tahmin edebilirsiniz: Eğer $n > 1$ ise,

$$p_{2n}(0) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \tag{5}$$

ve $1 \leq k \leq n$ ise,

$$p_{2n}(2k) = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-k}$$

Bu formüller sihirbazın şapkasından çıkan tavşanlar gibi sunuldu, ama okur bana inanmak zorunda değil, bu formüllerin doğruluğunu, (1,2,3) formüllerini kullanarak, n üzerine tümevarımla kanıtlayabilir.

Yukarda bulduğumuz (5) eşitliğini (4) eşitliğine yerleştirelim; elde ettiğimiz eşitlikle biraz oynayacak olursak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)4^k}\binom{2k}{k} = 1$$

eşitliğini buluruz. Güzel bir eşitlik!