Zenon'un Paradoksları

Ali Nesin

Zenon, İ.Ö. 5. yüzyılda yaşamış ve bugün üzerine pek az bildiğimiz Eski Yunanlı bir filozoftur. Ne yazık ki günümüze hiçbir yapıtı kalmamıştır. Zenon üzerine bildiklerimizi daha çok Eflatun'a (Parmenides adlı yapıtına) ve Aristo'ya (Fizik adlı yapıtına) borçluyuz.

Zenon kolay kolay yutulmayacak bir düşüncenin savunucusu olan Parmenides'in sadık bir öğrencisiydi. Parmenides şu inanılmaz düşünceyi savunuyordu: *Gerçek tektir ve değişmez. Çokluk, değişim ve hareket aslında yokturlar ve duyularımızın bizi kandırmasından kaynaklanırlar...*

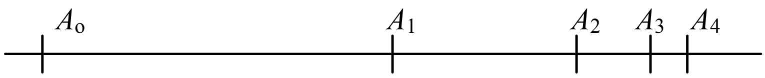
Zenon hocasının felsefesiyle alay edenleri susturmak için dört paradoks geliştirir. Zenon'un günümüze kalmasını sağlayan aşağıda açıklamaya çalışacağım (ve ne derece ciddi olduklarını göstermek amacıyla savunacağım) işte bu dört paradokstur. Bugün, yani 2500 yıl sonra bile, bu dört paradoks üzerine tartışma dinmemiştir ve gün geçtikçe filozoflar bu konuda daha fazla düşünce üretmektedirler. Bertrand Russell, Henri Bergson, Alfred North Whitehead, Zenon'un paradokslarını konu etmiş çağdaş filozoflardan birkaçıdır. Sanırım Hegel de konu etmiştir. Tolstoy Savaş ve Barış'ında Zenon'un paradokslarından sözeder.

Aşil'le Kaplumbağa. Zenon, paradokslarının birinde, yarıtanrı Aşil'le kaplumbağayı yarıştırır. Kaplumbağa Aşil'den çok daha yavaş olduğundan, Aşil'in önünden başlar yarışa. Zenon, Aşil'in kaplumbağayı hiç yakalayamayacağını savunur.

Gerçekten de Aşil'in kaplumbağayı yakalayabilmesi için, önce kaplumbağanın yarışa başladığı ilk noktaya erişmesi gerekmektedir. Aşil bu noktaya eriştiğindeyse, kaplumbağa biraz daha ilerde olacaktır. Şimdi Aşil, kaplumbağanın bulunduğu bu yeni noktaya erişmelidir. Aşil, kaplumbağanın bulunduğu bu yeni noktaya vardığındaysa, kaplumbağa biraz daha ilerde olacaktır. Çünkü kaplumbağa durmamaktadır. Bu böyle sürer gider ve Aşil kaplumbağaya hiçbir zaman erişemez.

Yaşamda böyle olmaz demeyin. Parmenides de, Zenon da, sizin gibi, yaşamda Aşil'in kaplumbağayı yakalayacağını biliyorlar. Ancak, gördüğümüzün gerçek olmadığını, duyularımızın bizi aldattığını ileri sürüyorlar.

Bu paradoks üzerine biraz düşünelim. Aşil yarışa kaplumbağanın 100 metre gerisinden başlasın. Aşil saniyede 100 metre koşsun. Kaplumbağa da saniyede 10 metre koşsun. Varsayalım ki öyle... Aşil'in yarışa başladığı noktaya A_0 adını verelim. Aşil bir saniye sonra kaplumbağanın bulunduğu ilk noktaya, A_1 noktasına erişecektir. Bu bir saniyede kaplumbağa 10 metre yol alacaktır ve A_2 noktasına varacaktır. Aşil A_2 noktasına 1/10 saniye sonra varacaktır. Bu 1/10 saniyede kaplumbağa 1 metre gitmiş olacaktır. Aşil bu 1 metreyi, 1/100 saniyede koşacaktır...



Paradoks olur da matematikçiler boş durur mu? Matematikçiler bu paradoksu çözmüşler. Şöyle çözmüşler:

Aşil A_0 noktasından A_1 noktasına 1 saniyede koşar
Aşil A_1 noktasından A_2 noktasına 1/10 saniyede koşar
Aşil A_2 noktasından A_3 1/100 koş

noktasına			saniyede	ar	
Aşil	A_3	noktasından A_4	1/1000		koş
noktasına			saniyede	ar	
	...			...	...

Demek ki, der matematiçiler, Aşil,

$$1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + ...$$

saniyede kaplumbağaya erişir. Basit bir aritmetik bu sonsuz toplamın 10/9 olduğunu gösterir[1]. Dolayısıyla Aşil kaplumbağayı 10/9 saniye sonra, yani 2 saniyeden, hatta 1,2 saniyeden az bir zamanda yakalar.

Filozoflar bu yanıttan pek hoşnut kalmazlar. Her şeyden önce sonsuz toplamdan rahatsız olurlar. Matematikçilerin matematik yaparken sonsuz tane sayıyı toplamalarına sözetmezler, göz yumarlar, ama gerçek yaşamdan alınmış bir probleme uygulanmasına karşı çıkarlar. Matematiğin gerçek yaşama her zaman uygulanabildiği nerden biliniyor?

Matematik, doğa yasalarını bulmaya çalışır. Bunu da oldukça iyi başarır. Örneğin matematik sayesinde uçaklar, trenler, binalar yapılır, hatta aya gidilir. Matematiğin birçok uygulaması vardır. Bu uygulamalar matematiğin doğayı anlamamızı sağlayan başarılı bir yöntem olduğunu gösterir. Ama her yere her zaman matematik uygulanabilir mi? Örneğin, iki elma artı üç armut beş meyve eder, çünkü 2 + 3 = 5'tir. Ama bu matematiksel gerçeği iki litre suyla üç litre alkole uygularsak, beş litre sıvı elde edeceğimiz çıkar, ki bu da yanlıştır. Demek ki matematiği uygularken dikkatli olmalıyız.

Doğa, matematiğin tam bir modeli değildir. Doğa matematiğin ancak yaklaşık bir modeli olabilir[2].

---

[1] Hesaplamak istediğimiz 1 + 1/10 + 1/100 + … sonsuz toplamına S adını verelim :

$$S = 1 + 1/10 + 1/100 + \dots$$

Şimdi S'yi 10'la çarpalım :

$$10S = 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + \dots = 10 + S$$

Bu eşitlikten de S'nin 10/9 olduğu çıkar… Aslında çıkmaz…

Ancak, S'nin sonlu bir toplam olduğunu biliyorsak yukardaki hesaplar $S = 10/9$ verir. Örneğin,

$$T = 1 + 10 + 100 + 1000 + \dots$$

sonsuz toplamı olsun. T'nin sonlu olamayacağı besbelli. T'yi 10'la çarpalım :

$$10T = 10 + 100 + 1000 + \dots = T - 1$$

Bundan da $T = -1/9$ gibi saçma bir sonuç çıkar.

Öte yandan okur, bize bu yazılık güvensin, S sonlu bir sayıdır ve 10/9'a eşittir.

[2] Bu sözlerim yazıyı okuyan birkaç dostumun tuhafına gitti. Doğayı küçük gördüğüm, matematiği çok yücelttiğim sonucunu çıkardılar. Amacım bu değildi elbet. Sanırım yanlış anlama "model" sözcüğünden kaynaklanıyor.

"Model" sözcüğü matematikte şu anlamda kullanılır: Kuram, adı üstünde, kuramsaldır, yani biçimseldir. Matematiksel bir kuram belitlerden (aksiyomlardan) ve bu belitler kullanılarak kanıtlanan teoremlerden oluşur. Örneğin Öklid geometrisi bir kuramdır, belitleri ve teoremleri vardır. Bir tane Öklid geometrisi vardır. Oysa Öklid geometrisinin belitlerinin, dolayısıyla teoremlerinin de, geçerli olduğu birçok uzay vardır. Bu uzaylardan herbiri Öklid geometrisinin bir modelidir.

Matematikte model, bir kuramın belitlerinin ve dolayısıyla teoremlerinin de geçerli olduğu uzaydır/ortamdır/yapıdır/dünyadır. Bir kuramın uygulanabildiği "dünyaya" o kuramın modeli adı verilir. Biraz matematik bilenler için örnekleri çoğaltabilirim. Gruplar kuramı, halkalar kuramı, cisimler kuramı birer kuramdırlar, belitlerden ve teoremlerden oluşurlar. Her grup, her halka ve her cisim bu kuramların bir modelidir. Matematik, mantık ve matematiksel mantık bilmeyen birisinin bu söylediklerimi kolay kolay anlayamayacağını biliyorum. İlerde bu konuda bir kitap yazmayı tasarlıyorum.

Sonuç olarak şunu söylemek istiyorum: Yukardaki sözlerimle doğayı küçümsemeyi, matematiği yüceltmeyi amaçlamadım; yalnızca kuramsal matematiğin belitlerinin doğaya uygulanamayabileceğini belirtmek istedim.

Üstelik, yukardaki hesap, Aşil'in kaplumbağayı 10/9 saniyede yakalayacağını göstermiyor. Yukardaki hesap gösterse gösterse Aşil'in kaplumbağayı **eğer yakalarsa** 10/9 saniyede yakalayacağını gösteriyor. Aşil'in kaplumbağayı yakalayıp yakalamadığını bilmiyoruz ki, ne zaman yakalayacağı sorusunu sorup yanıtlayalım... Sorumuz, Aşil'in kaplumbağayı ne zaman yakalayacağı değil, yakalayıp yakalayamayacağı...

Yanlış anlaşılmasın, çağdaş filozofların çoğu – hepsi değil ama – Aşil'in kaplumbağayı yakalayacağına inanıyorlar. Filozofların derdi bu değil. Filozofların derdi Zenon'un paradoksu... Zenon'un paradoksunda yanlış nerde? Eğer mantığımızı kullanarak saçma bir sonuç kanıtlarsak, mantığımızda (yani ya varsayımlarımızda ya çıkarım kurallarımızda) bir yanlış var demektir. Bu yanlışı bulmalıyız.

Zenon'un bu paradoksunda bir başka sorun daha var. O da şu: Aşil kaplumbağayı yakalamak için sonsuz tane iş yapmalı; önce A_1 noktasına gitmeli, sonra A_2 noktasına gitmeli, sonra A_3 noktasına gitmeli... Sonsuz tane iş yapabilir miyiz? İşte en önemli soru bu. Matematikçi kendi düşünsel dünyasında sonsuz tane sayıyı toplayabilir, ama biz, yaşamda, sonsuz tane sayıyı toplayamayız. Sonsuz tane iş yapamayız. En azından sonsuz tane iş yapabileceğimizi düşünmek oldukça zor.

Yoksa Aşil kaplumbağaya erişmek için sonlu tane mi iş yapıyor? Bu soruya geçmeden önce Zenon'un ikinci paradoksundan sözedelim.

İkiye Bölünme. Zenon, salt Aşil'in kaplumbağayı yakalayamayacağını söylemekle yetinmiyor. Aşil'in bir noktadan bir başka noktaya gidemeyeceğini de söylüyor. Diyelim Aşil A noktasında ve B noktasına gidecek.

Aşil A'dan B'ye gitmek için önce yolun yarısına gitmeli. Yolun yarısına gittikten sonra kalan yolun yarısına gitmeli. Daha sonra kalan yolun yarısına... Bu böylecene sonsuza değin sürer. Diyelim A'yla B arasındaki uzaklık 1 metre. Aşil önce 1/2 metre gitmeli. Gittiğini varsayalım. Geriye 1/2 metre kalır. Şimdi Aşil kalan bu 1/2 metrenin yarısına gitmeli, yani 1/4 metre daha gitmeli. Geriye 1/4 metre daha kalır. Aşil bu kalan 1/4 metrenin yarısına gitmeli, yani 1/8 metre daha gitmeli... Daha sonra 1/16 metre daha gitmeli...

Aşil sonsuz iş yapamayacağından B noktasına varamaz...

Havada uçan bir oka bakalım. Okun sonsuz tane iş yaptığını, yani sonsuz tane noktadan geçtiğini varsayalım. Beynimiz okun sonsuz noktadan geçişini algılıyabilir mi? Bunu düşünmek oldukça zor. Olsa olsa beynimiz okun havada sonlu tane fotoğrafını çekiyordur ve bu fotoğrafları bir sinema şeriti gibi gözümüzün önünden geçiriyordur. Bu konuya birazdan geleceğim. Paradoksa geri dönelim. Ama şimdilik, beynimizin dışdünyayı sonlu biçimde algıladığını aklımızda tutalım.

Okur belki sonsuz tane iş yapabileceğimizi düşünüyordur: birinci iş, ikinci iş, üçüncü iş... O zaman sonsuz iş yapmaya sondan başlayalım! Birinci paradoksa çok benzeyen bu ikinci paradoksu biraz değiştirip, Aşil'in, bırakın B noktasına gidememesini, yerinden bile kımıldayamayacağını da kanıtlayabiliriz. Gerçekten de Aşil'in A'dan B'ye gidebilmesi için önce yarı yola gitmesi gerekir. Yolun yarısına gidebilmesi için önce yolun dörtte birine gitmesi gerekir. Ama daha önce yolun sekizde birine gitmesi gerekir... Daha önce de on altıda birine gitmesi gerekir… Dolayısıyla Aşil A noktasından öteye adımını atamaz bile. İlerleyebileceği bir nokta yoktur ki! Gideceği her noktanın önce yarısına gitmesi gerekmektedir.

Yoksa A'yla B arasında ve A'dan hemen sonra gelen bir nokta mı var? Galiba öyle...

Paradoksun ikiye bölmekten kaynaklandığı kesin. Aşil'in gitmesi gereken fiziksel uzaklığı hep ikiye bölüyoruz. Demek ki fiziksel uzaklığı (uzayı) durmadan ikiye bölemeyiz. Demek ki bir zaman sonra ikiye bölememememiz gerekir. İkiye böle böle, bir zaman sonra öylesine küçük bir uzaklık elde ederiz ki, elde edilen bu miniminnacık uzaklık bir kez daha ikiye bölünemez. Bir başka deyişle, **uzay sürekli değildir.** Uzay, bölünmeyen en küçük uzay parçacıklarından oluşmuştur. 20. yüzyılın parçacık kuramı da bu yönde düşünmemiz gerektiğini söylemiyor mu zaten? Bu uzay parçacıklarına **uzaybirim** diyelim[3].

Uzayın uzaybirimlerden oluştuğunu kanıtladık (!). Her uzaklık sonlu sayıda uzaybirimden oluşur.

Üçüncü Paradoks. Zenon'un üçüncü paradoksuna göre, hareket yoktur, hiçbir şey hareket edemez. Uçan bir ok ele alalım örnek olarak. Okun hareket ettiğini sanıyoruz değil mi? Zenon yanıldığımızı kanıtlıyor.

Ok her an durmaktadır. İnanmazsanız okun havada bir fotoğrafını çekin. Fotoğrafta okun durduğunu göreceksiniz. Demek ki ok her an durmaktadır. Ok her an durduğuna göre hep duruyor demektir. Öyle değil mi? Okun hareket edebilmesi için en az bir an hareket etmesi gerekmektedir. Oysa ok her an durmaktadır. Her an durmakta olan ok hep durmaktadır.

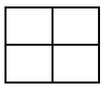
Uzayın sürekli olamayacağını yukarda gördük. Uzay küçük, çok küçük, bölünemeyen uzaybirimlerinden oluşmuştur. Okun bir uzaybirimi uzunluğunda olduğunu varsayalım. Uzaybirim uzunluğundaki ok, bir uzaybiriminin içinde hareket edemez, çünkü okun o uzaybiriminde hareket edebilmesi için, okun uzaybiriminden daha kısa olması gerekir ki, uzaybirimden daha kısa bir nesne olamayacağını biliyoruz. Her uzaybiriminde hareketsiz duran ok, hep hareketsizdir.

Sinema da öyle değil midir? Sinema ekranında yürüyen bir insan aslında yürümeyen binlerce insan resminin gözümüzün önünden hızla geçmesi değil midir? Doğada hareket de aslında hareketsizlik değil midir[4]?

Uçan ok her an durmaktadır. Ama bir sonraki uzaybiriminde varolmaktadır. Bergson'un da dediği gibi, aynen sinema ekranında yürüyen bir insan örneği, ok bize hareket edermiş gibi görünmektedir. Oysa her an durmaktadır.

Dördüncü Paradoks. Zenon'un son paradoksunu anlamak kolay değil. Yukarda da dediğim gibi Zenon'dan yazılı bir yapıt yok elimizde. Zenon'un paradokslarını bize aktaran Aristo. Aristo'nun aktardığı biçim pek anlaşılır gibi değil. Bu yüzden dördüncü paradoksun çeşitli yorumları var. Vereceğim yorum Aristo'nun aktardığı yorum değil ama ona çok yakın.

Yukarda, uzayın sürekli olmadığını, bölünmeyen **uzaybirim**lerden oluştuğunu kanıtladık, daha doğrusu Zenon kanıtladı. Şimdi aşağıdaki şekle bakalım.



Her kare bir uzaybirimini simgelesin. Sol üst köşede *A* nesnesi, sağ alt köşede *B* nesnesi var. *A* ve *B* aynı anda ve aynı hızla "hareket" etsinler. *A* sağa, *B* sola gitsin. Bir zaman sonra *A* sağdaki karede, *B* de soldaki karede olur.

Şimdi paradoksal soruyu soralım: *A* ve *B* nerde karşılaştılar?

---

[3] Bergson bu paradoksları ve aşağıda açıklayacağım ok paradoksunu şöyle çözmeyi öneriyor: Bir hareketin belirlenmesi için hareketin başladığı ve bittiği noktaların verilmesi gerekmektedir. Okun hareketini ikiye bölmek demek, bir hareketin değil, iki hareketin olduğunu göstermek demektir. Okun hareketini ikiye bölmeye hakkımız yoktur. Okun bir ve bir tek hareketi vardır. Okun aldığı yolu ikiye bölebiliriz ama okun hareketini ikiye bölemeyiz.

[4] Bunların benim düşüncelerim olmadığını, Zenon'un düşünceleri olduğunu anımsatırım. Okuru kışkırtmak amacıyla, kendimi Zenon'un yerine koyarak Zenon'un paradokslarını savunur görünüyorum.

Hiç karşılaşmadılar! Çünkü aralarında karşılaşabilecekleri bir yer yok!