Yoksulun Kazanabildiği Bir Oyun

Ali Nesin

Bu yazıda yoksulu kazandıracağız. Küçük bir olasılıkla da olsa, yoksul kazanabilecek.

Oyunu açıklamadan önce, *Sonlu Oyunlar* adlı yazımızdaki oyunu anımsayalım:

İki oyuncu yazı-tura oynuyorlar. İlk yazı-tura atışında ortaya 1 lira sürülüyor. Oyunculardan biri, diyelim birinci oyuncu, kaybettikçe ortaya koyduğu parayı arttırıyor, bir önceki atışta kaybettiğinin iki katını koyuyor. Kazandığındaysa ortaya 1 lira koyuyor.

Örneğin birinci oyuncu ilk atışta kaybederse, ikinci atışta ortaya 2 lira sürüyor. İkinci atışta da kaybederse, üçüncü atışta ortaya 4 lira sürüyor. Yine kaybederse 8 lira sürüyor… Kazanana değin bu böyle devam ediyor. Kazandığında gene 1 lira ortaya sürüyor. Birinci oyuncu stratejisine devam edebildikçe devam ediyor. Devam edemediğinde, yani cebinde yeterli parası kalmadığında, oyun bitiyor.

Sonlu Oyunlar yazısında, iki oyuncunun da sonlu parası olduğunda bu oyunun uygulamada kesinlikle biteceğini kanıtlamıştık.

Aynı oyunu oynayacağız. Ancak bu kez ikinci oyuncunun sonsuz parası olduğunu varsayacağız (zengin oyuncu.) Birinci oyuncununsa yalnızca 1 lirası var (yoksul oyuncu.) Yoksul, birinci oyuncu ve yukarda açıkladığımız stratejiyle oynuyor. Eğer stratejisini sürdüremezse oyun bitiyor; oyun daha önce bitemez.

Zenginin parası hiç bitmediğinden, zenginin bu oyunu kaybetme olasılığı yoktur.

Daha ilk yazı-tura atışında yoksul kaybederse, yoksul cebindeki tek lirayı kaybeder ve oyun hemen biter. Dolayısıyla en az 1/2 olasılıkla yoksul oyunu kaybedecektir.

Yoksulun oyundan beş parasız kalkma olasılığını bulamadım. Yazının sonunda bu olasılığı bulmak için hesaplanması gereken bir sonsuz toplamı vereceğim.

Yoksul ilk atışta kazanıp ikinci atışta kaybederse ne olur? Oyun gene biter, ama bu kez yoksulun cebinde 1 lirası vardır. Yani yoksul “tapi” kalkar. Çünkü, yoksul, birinci yazı-tura atışında kazanmıştır, dolayısıyla ikinci atıştan hemen önce cebinde 2 lirası vardır. İkinci atışta kaybettiğinde yalnızca 1 lirası kalmıştır. Üçüncü atış için ortaya 2 lira koyması gerekmektedir ama 2 lirası yoktur.

Demek ki en az 1/4 olasılıkla yoksul oyundan ne kazançlı ne de zararlı kalkar. Yoksulun oyundan ne kazançlı ne de zararlı kalkma olasılığını da bulamadım.

Yoksulun Şansı başlıklı yazıdaki oyunun tersine bu oyunda yoksul kazanabilir. Öyle bir an gelebilir ki, yoksulun cebinde 1 liradan fazla para olmasına karşın, yoksul stratejisini sürdüremez (yani oyun biter.) Örneğin, yoksul ilk dört atışta kazanır da sonraki iki atışta kaybederse yoksulun cebinde 2 lira olmasına karşın oyun biter.

Demek ki en az $1/2^6 = 1/64$ olasılıkla yoksul oyundan kazançlı ayrılır.

Yoksulun oyundan k lira kazançlı kalkma olasılığını da bilmiyorum[1].

---

[1] Bu hesaplayamadığım olasılıkların yaklaşık hesaplanabilmesi için gereken malzeme bu yazıda vardır. Dileyen okur bu sayıları yaklaşık hesaplayabilir. Bu tam olarak hesaplayamadığım olasılıklar henüz ad verilmemiş sayılar da olabilirler. Sözcük sayımız sonsuz ama ancak **sayılabilir** sonsuzlukta. Gerçel (reel) sayılarsa **sayılamaz** sonsuzlukta. Dolayısıyla her sayıya ad veremeyiz. Önemli bulduğumuz sayılara ad veririz. Örneğin π önemli olduğundan π’ye bir ad verilmiştir: π. π’nin karesinin ve karekökünün de adları vardır: π^2 ve $\sqrt{\pi}$. Tam olarak hesaplayamadığım bu üç olasılığa daha önce bir ad verilmiş midir bilmiyorum. Verilmemişse hiçbir zaman tam olarak hesaplayamayız. Nasıl π’nin kaç olduğunu hiçbir zaman tam olarak bilemeyeceksek ve ancak adını söyleyerek π’nin kimliğini

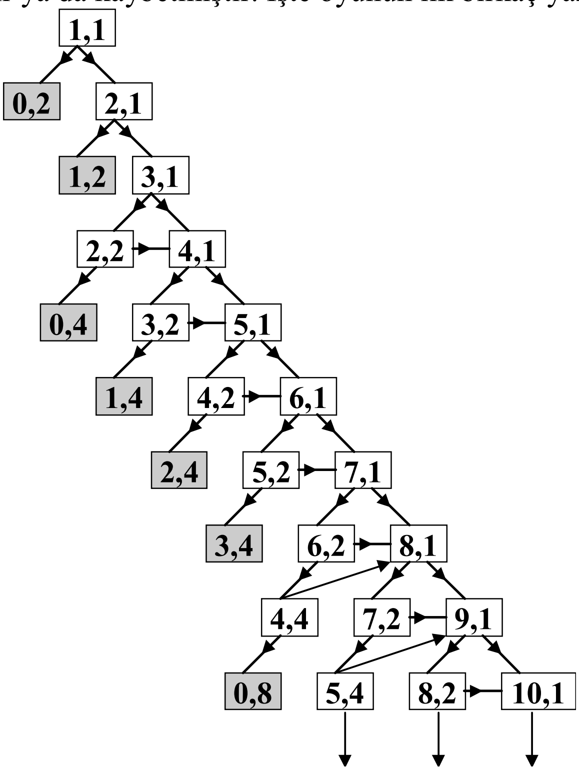
Bu oyun sonsuza dek sürebilir, örneğin fakir hep kazanırsa... Ama göreceğiz ki oyunun sonsuza dek sürebilme olasılığı 0'dır. Bunu kanıtlayabildim! Dolayısıyla oyun %100 (yani 1) olasılıkla biter. Demek ki oyun kuramsal olarak sonsuza dek sürebilse bile, uygulamada sonlu sayıda yazı-tura atışından sonra biter[2]. Bu yazıda işte bu sonucu kanıtlayacağız.

Oyunun ilk anlarda alabileceği durumları gösteren bir şema çizeceğiz. Önce oyunun alabileceği durumlarını saptayalım. Oyunun her durumunu iki sayıyla gösterebiliriz. Birinci sayı yoksulun cebindeki para olsun; ikinci sayıysa bir sonraki atış için ortaya sürülen (daha doğrusu yoksulun ortaya sürmesi gereken) para olsun. İkinci sayı hep 2'nin üstleri olmak zorunda, 1, 2, 4, 8, 16 gibi.

Oyunun en başındaki durum (1,1) durumu. Çünkü, yoksul oyuna 1 lirayla başlıyor ve ilk atışta ortaya 1 lira sürüyor. Bu durumda yoksul kazanırsa oyun (2,1) durumuna geçecek, kaybederse de (0,2) durumuna (ve oyun bitecek.)

(2,1) durumundan sonra oyun ya (1,2) durumuna ya da (3,1) durumuna erişir. Birinci şıkta oyun biter, ikinci şıkta sürer.

Eğer bir durumdan sonra oyun bitmemişse, oyun iki durumdan birini alır: yoksul o atışta ya kazanmıştır ya da kaybetmiştir. İşte oyunun ilk birkaç yazı-tura atışında alabileceği durumlar:



(Gri karelerde oyun bitmiştir. Sola giden oklar kaybettiğimizi, sağa giden oklarsa kazandığımızı gösteriyorlar.)

belirtebiliyorsak, bu sayıları da hiçbir zaman bilemeyebiliriz, hatta daha önceden adı konmuş sayılarla arasında cebirsel bir bağıntı bile olmayabilir. Özet olarak demek istediğim, bu sayıların tam olarak hesaplanamayabilecekleri. Bu bağlamda akla gelen ilk soru şu: Hesaplayamadığım olasılıklar kesirli sayılar mıdır? Sanmıyorum.

[2] Bu oyunun 1 olasılıkla bitmesi yoksulun cebindeki paraya bağlı değildir. Aşağıdaki şemadan da anlaşılacağı üzere, yoksulun cebinde 1 lira olduğunda oyun 1 olasılıkla biterse, yoksulun cebinde kaç para olursa olsun oyun gene 1 olasılıkla biter.

Yukarda da dediğimiz gibi oyunun sonsuza değin sürme olasılığının 0 olduğunu kanıtlayacağız. $(n,2^k)$ durumuna gelme olasılığına $p(n,2^k)$ diyelim. Örneğin,

$p(1,1)$	=	1
$p(0,2)$	=	$1/2$
$p(2,1)$	=	$1/2$
$p(1,2)$	=	$1/4$
$p(3,1)$	=	$1/4$
$p(2,2)$	=	$1/8$
$p(4,1)$	=	$1/8 + 1/16 = 3/16$
$p(0,4)$	=	$1/16$
$p(3,2)$	=	$1/16 + 1/32 = 3/32$
$p(5,1)$	=	$1/16 + 2/32 + 1/64 = 9/64$

Oyunun sonsuza gidebilmesi için bütün $(n,1)$ durumlarına ulaşılmalıdır. Bu, şemadan kolayca anlaşılıyor. Demek ki oyunun sonsuza dek sürebilme olasılığı, $p(n,1)$ dizisinin n sonsuza gittiğinde aldığı değerdir. Dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} p(n,1)$$

sayısını hesaplamamız gerekiyor. Bu sayının 0 olduğunu göreceğiz.

Bu limitin sıfır olduğunu kanıtlamak için, aşağıdaki eşitliği bulmak yeterlidir:

$$\lim_{n\to\infty} p(2^n-1,1) = 0. \qquad (*)$$

Bu son eşitliği kanıtlamak daha kolay olacak.

Önce $p(n,2^k)$ sayılarını bulmak istiyoruz. Bunun için biraz matematik yapmalıyız. Okurun, yapacağımız matematiği daha iyi anlaması için, sık sık yukardaki şemaya bakması gerekecektir.

İlk olarak, eğer $k > 0$ ise,

$$p(n,2^k) = p(n+2^{k-1},2^{k-1})/2 \qquad (1)$$

eşitliğine dikkatinizi çekerim. Çünkü, eğer $k > 0$ ise, $2^k > 1$ dir, yani oyuncumuz 1'den büyük bir para ortaya sürmektedir; dolayısıyla $(n,2^k)$ durumuna gelmenin bir tek yolu vardır, o da bir önceki oyunda kaybetmiş olmak. Bir önceki oyunun durumu ne olabilir? $(n,2^k)$ durumunda ortaya 2^k koyduğumuza göre, bir önceki oyunda ortaya 2^{k-1} koymuşuzdur (ve kaybetmişizdir.) Dolayısıyla $(n,2^k)$ durumuna ancak $(n+2^{k-1},2^{k-1})$ durumundan geçilebilir. (1) eşitliği işte bu yüzden geçerlidir.

Eğer $k > 1$ ise, (1) eşitliğinde k yerine $k-1$ ve n yerine $n + 2^{k-1}$ koyabiliriz ve

$$p(n+2^{k-1}, 2^{k-1}) = p(n+2^{k-1}+2^{k-2},2^{k-2})/2$$

eşitliğini elde ederiz. Bu son eşitliği (1)'in sağ tarafına yerleştirerek,

$$p(n, 2^k) = p(n+2^{k-1}+2^{k-2},2^{k-2})/4$$

eşitliğini elde ederiz. Bunu böylece sürdürürsek,

$$p(n,2^k) = p(n+2^{k-1}+ 2^{k-2}+...+2+1,1)/2^k$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $2^{k-1}+2^{k-2}+...+2+1$ *s*ayısı 2^k-1 *s*ayısına eşit olduğundan, eğer $k > 0$ ise, ppppp niye k > 0???

$$p(n,2^k) = p(n+2^k-1,1)/2^k \tag{2}$$

eşitliği geçerlidir.

(2) eşitliğinden, $p(n,2^k)$ *s*ayılarını bulmak için, $p(n,1)$ *s*ayılarını bulmamız gerektiği anlaşılıyor. Bu sayıları bulalım. $(n,1)$ durumuna ancak kazanarak gelinir. Yani $(n-1,1)$, $(n-2,2)$, $(n-4,4)$ gibi durumlardan. Dolayısıyla, $p(n,1)$ *s*ayısı,

$$p(n-1,1)/2,\ p(n-2,2)/2,\ p(n-4,4)/2,...$$

sayılarının to*p*lamıdır. Yani, bir k için, $p(n-2^k,2^k)/2$ biçiminde yazılabilen sayıların to*p*lamıdır. (2) eşitliği,

$$p(n-2^k,2^k) = p(n-1,1)/2^k$$

eşitliğini verdiğinden, $p(n,1)$ *s*ayısının $p(n-1,1)/2^{k+1}$ *s*ayılarının toplamı olduğu anlaşılır. Ama buradaki *k*sayıları $n-2^k \geq 2^k$ *k*oşulunu, yani $2^{k+1} \leq n$ koşulunu sağlamalıdır, çünkü aksi halde $(n-2^k,2^k)$ durumunda oyun bitmiştir ve bu durumdan $(n,1)$ durumuna geçilmez. $k(n)$, $2^k \leq n$ eşitsizliğini sağlayan *k*sayılarının en büyüğü olsun. Demek ki,

$$p(n,1) = \sum_{k=1}^{k(n)} p(n-1,1)/2^k = p(n-1,\ 1)\sum_{k=1}^{k(n)} 1/2^k$$
$$= p(n-1,\ 1)(1-1/2^{k(n)})$$

Bu eşitliği $n-1$ *k*ez kullanarak,

$$p(n,1) = p(1,1)\prod_{i=2}^{n}(1-1/2^{k(i)})$$

buluruz. Ama $p(1,1) = 1$. Demek ki,

$$p(n,1) = \prod_{i=2}^{n}(1-1/2^{k(i)}) \tag{3}$$

Burada n yerine 2^n-1 alırsak,

$$p(2^n-1,1) = \prod_{i=2}^{2^n-1}(1-1/2^{k(i)}) \tag{4}$$

buluruz. Şimdi k herhangi bir doğal sayı olsun. Hangi i *s*ayıları için $k(i) = k$ eşitliğinin doğru olduğunu bulalım. i, $k(i) = k$ eşitliğini sağlayan bir sayı olsun. k sayısı, $2^k \leq i$ eşitsizliğini sağlayan sayıların en büyüğü olduğundan, $2^k \leq i < 2^{k+1}$ eşitsizliği geçerlidir. Ve bunun tersi de doğrudur: eğer $2^k \leq i < 2^{k+1}$ ise, $k(i) = k$ eşitliği geçerlidir. Bu eşitsizlikleri sağlayan kaç tane i *s*ayısı vardır? Biraz düşünme, 2^k tane olduğunu gösterir. (4) eşitliğinin sağındaki çarpılacak terimler bu 2^k tane i *s*ayısı için birbirlerine eşittirler. Dolayısıyla (4) eşitliğini,

$$p(2^n-1,1) = \prod_{k=1}^{n-1}(1-1/2^k)^{2^k} \tag{5}$$

olarak yazabiliriz. Bu eşitliği kullanarak $p(2^n-1,1)$ *s*ayılarının n sonsuza gittiğinde sıfıra yakınsadıklarını kanıtlayacağız. Bunun için konumuzdan biraz uzaklaşıp iki önsav kanıtlayacağız:

Önsav 1. *Eğer* $0 < x < 1$ *ise ve* $n > 0$ *bir doğal sayıysa,*

$$(1-x)^n \leq 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

Kanıt: Eğer $n = 1$ ise önsav elbette doğru. Şimdi önsavın n için doğru olduğunu varsayıp $n + 1$ için kanıtlayalım. Demek ki,

$$(1-x)^n \le 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

eşitsizliğini biliyoruz, daha doğrusu bildiğimizi varsayıyoruz. Aynı eşitliği n yerine n+1 için, yani

$$(1-x)^{n+1} \le 1 - (n+1)x + \frac{(n+1)n}{2}x^2$$

eşitsizliğini kanıtlamaya çalışacağız. Her iki tarafı da $1 - x$ ile çarpalım, $0 < 1 - x$ olduğundan,

$$(1-x)^{n+1} \le \left(1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2\right)(1-x)$$

elde ederiz. Üstteki eşitliğin sağ tarafını açacak olursak,

$$(1-x)^{n+1} \le 1 - (n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}x^2 - \frac{n(n+1)}{2}x^3$$

buluruz. $x > 0$ olduğundan, yukardaki son terimi atıp,

$$(1-x)^{n+1} < 1 - (n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}x^2$$

elde ederiz. Demek ki önsav n+1 için doğru. Tümevarımla önsav her doğal sayı için doğrudur. Önsavımız kanıtlanmıştır.

Önsav 2. $k \ge 1$ *ise*, $(1-1/2^k)^{2^k} < 1/2$.

Kanıt: Üstteki önsavda $x = 1/2^k$ ve $n = 2^k - 1$ alalım.

$$(1-1/2^k)^{2^k} \le 1 - 2^k(1/2^k) + \frac{2^k(2^k-1)}{2}(1/2^{2k})$$

elde ederiz. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk iki terim sadeleşir. En sağdaki terimi hesaplayalım:

$$\frac{2^k(2^k-1)}{2^{2k+1}} = \frac{2^k-1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2}$$

İkinci önsav da kanıtlanmıştır[3].

Şimdi (5)'teki sayıların sıfıra yakınsadığını kanıtlayabiliriz. İkinci önsavı ve (5) eşitliğini kullanarak,

$$p(2^n-1,1) \le 1/2^{n-1}$$

buluruz. n sonsuza gittiğinde sağdaki terimler 0'a yakınsadığından, $p(2^{n-1},1)$ sayıları da sıfıra yakınsar. Demek ki oyunun sonsuza dek sürme olasılığı 0'dır ve oyun 1 olasılıkla biter.

Oyundan yoksulun zararlı (yani 0 lirayla) kalkma olasılığı nedir? Bu olasılığı bulmak için $p(0,2^k)$ sayılarını toplamalıyız.

$$p_o = \sum_{k=1}^{\infty} p(0,2^k)$$

olsun. p_o, yoksulun oyundan zararlı kalkma olasılığıdır. (2) eşitliğinde $n = 0$ alırsak,

---

[3] Bu önsavın doğruluğu biraz analizle de çıkabilir. $(1-1/2^k)^{2^k}$ sayılarının $1/e$ sayısından (dolayısıyla 1/2 sayısından da) küçük oldukları analiz kullanarak kolaylıkla kanıtlanabilir.

$$p(0,2^k) = p(2^k-1,1)/2^k$$

buluruz. (5) eşitliğini de kullanarak,

$$p(0,2^k) = \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - 1/2^i)^{2^i}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$p_o = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - 1/2^i)^{2^i}$$

dir. Bu sayıyı hesaplayamadım.