

## Yenişemeyen Zarlar

Ali Nesin

“Ahmet, Belgün'den daha uzun boyluysa, Belgün de Cemal'den daha uzun boyluysa, Ahmet, Cemal'den daha uzun boyludur,” önermesi hiç kuşkusuz doğrudur. Çünkü  $A < B$  ve  $B < C$  eşitsizliklerinden,  $A < C$  eşitsizliği çıkar.

Şu önermeyi ele alalım şimdi: “Ahmet Belgün'den daha iyi satranç oynuyorsa ve Belgün de Cemal'den daha iyi satranç oynuyorsa, Ahmet Cemal'den daha iyi satranç oynuyordur.”

Bu önerme doğru mudur? Ahmet gerçekten Cemal'den daha iyi satranç oynuyorsa, önerme doğrudur elbet. Ama genel olarak, herhangi üç kişi için doğru mudur bu önerme? Bir başka deyişle,  $A$ ,  $B$  ve  $C$  herhangi üç kişiyi simgeliyorsa,  $A$ ,  $B$ 'den,  $B$  de  $C$ 'den daha iyi satranç oynuyorsa,  $A$ ,  $C$ 'den daha iyi satranç oynuyor diyebilir miyiz?

Sorduğum sorunun yanıtını bilmiyorum, çünkü soru matematiksel değil.

Konuyu biraz olsun deşelim. Soruyu basitleştireceğiz, satranç oynamak yerine zar atacağız.  $A$  ve  $B$  diye adlandırdığımız iki zarın altı yüzünde şu sayılar yazılı olsun:

$A$ : 1 4 5 7 9 12  
 $B$ : 2 3 6 8 10 11

Bu iki zar birbiriyle “en yüksek sayıyı atma” oyunu oynasa, hangisi daha çok kazanır, yani hangi zarın kazanma olasılığı daha yüksektir? Bu soruyu yanıtlamak için gelebilecek zarları bir tabloyla gösterelim.

	1	4	5	7	9	12
2	$B$	$A$	$A$	$A$	$A$	$A$
3	$B$	$A$	$A$	$A$	$A$	$A$
6	$B$	$B$	$B$	$A$	$A$	$A$
8	$B$	$B$	$B$	$B$	$A$	$A$
10	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$A$
11	$B$	$B$	$B$	$B$	$B$	$A$

Örneğin,  $A$ 'ya 9,  $B$ 'ye 6 geldiği durumu beşinci kolonla üçüncü sıranın kesiştiği yerde gösterdik.  $A$ 'nın  $B$ 'yi yendiği zar atışlarına  $A$  yazdık,  $B$ 'nin  $A$ 'yı yendiği zar atışlarıysa  $B$  yazdık. Sayıldığında görüleceği gibi,  $B$ ,  $A$ 'yı 19 kez yeniyor. Demek ki  $B$ 'nin  $A$ 'yı yenme olasılığı  $19/36$ 'dır. Ve elbet,  $A$ 'nın  $B$ 'yi yenme olasılığı  $17/36$ 'dır<sup>1</sup>. Dolayısıyla iki zardan birini seçmek gerekirse  $B$  zarını seçmeliyiz, çünkü  $B$  zarıyla kazanma olasılığımızı artırmış oluruz. Hatta bu oyunu  $B$  zarıyla ( $A$  zarına karşı) 36 milyon kez oynayacak olsak, aşağı yukarı 19 milyonunda kazanırız, geriye kalan 17 milyonunda kaybederiz. Sonuç olarak  $B$  zarı  $A$  zarından (olasılık olarak elbet) daha iyidir.

Bu kez üç zarımız olsun:  $A$ ,  $B$  ve  $C$  zarları. Ve zarların üstünde şu sayılar yazılı olsun:

$A$ : 1 5 6 10 13 18  
 $B$ : 2 3 7 11 16 17  
 $C$ : 4 8 9 12 14 15

Bu zarlarla  $C$ ,  $B$ 'yi  $20/36$  olasılıkla yener (hesapları okura bırakıyorum.)  $B$  de  $A$ 'yı  $19/36$  olasılıkla yener. Demek ki  $C$  zarı  $B$  zarından ve  $B$  zarı  $A$  zarından daha iyidir. En iyi zarın  $C$  olduğu sonucuna varabilir miyiz?

<sup>1</sup> Eşitlik (yenişememek) olmadığından, bu iki olasılığın toplamı 1 olmalıdır.

$C$ 'yle  $A$ 'yı birbirleriyle kapıştırarak olursak,  $C$ 'nin  $A$ 'yı gerçekten de  $21/36$  olasılıkla yendiğini görürüz.

Demek  $C$ , hem  $A$ 'yı hem de  $B$ 'yi yeniyor. Hiç kuşku yok ki bu örnekte  $C$  en iyi zardır.

Birinci Soru. *Öyle  $A$ ,  $B$  ve  $C$  zarları var mıdır ki,  $A$  zarı  $B$  zarını yensin<sup>2</sup>,  $B$  zarı  $C$  zarını yensin ve  $C$  zarı  $A$  zarını yensin? Ve zarların üstünde 18 değişik sayı olsun<sup>3</sup>?*

Birinci Sorunun Yanıtı. Evet vardır! Bu zarları bulacağız. Hatta öyle zarlar bulacağız ki,  $A$ ,  $B$  ve  $C$  birbirlerini hep aynı sonuçla, 19'a 17 yenecek! Ve atacakları ortalama zar aynı olacak!

1'le 18 arasındaki sayıları rastgele bir biçimde  $A$ ,  $B$  ve  $C$ 'ye dağıtalım. Eğer şanslı bir günümüzdeyse istediğimize ulaşırız. Şansımızı deneyelim. Diyelim  $A$ ,  $B$  ve  $C$ 'ye şu sayıları dağıttık:

$A$ :	3	5	8	12	14	16
$B$ :	2	4	9	11	13	18
$C$ :	1	6	7	10	15	17

Bu zarları yarıştırırsak şu sonuçları elde ederiz:

$A-B$ :	19-17
$B-C$ :	19-17
$C-A$ :	18-18

İlk iki karşılaşma istediğimiz gibi, ama son karşılaşma istediğimiz gibi değil.  $C$ 'nin  $A$ 'yı yenmesini istiyorduk, oysa yenemediler. Demek ki  $C$ 'yi güçlendirip  $A$ 'yı zayıflatmamız gerekir.  $A$ 'nın büyük bir sayısını  $C$ 'nin küçük bir sayısıyla değiştirecek bu dediğimiz olur ama, o zaman da ilk iki karşılaşmanın sonuçlarını değiştirmiş olabiliriz... Bunu engellemeliyiz. Nasıl engelleyebiliriz?  $A$ 'nın hangi büyük sayısıyla  $C$ 'nin hangi küçük sayısını değiştirelim ki,  $A-B$  ve  $B-C$  karşılaşmaları (yani  $B$ 'nin yaptığı karşılaşmalar) bu değişimden etkilenmesinler?  $A$ 'nın 8'yle  $C$ 'nin 7'sini değiştirecek, hem  $C$  güçlenmiş olur, hem  $A$  zayıflamış olur, hem de  $A-B$  ve  $B-C$  karşılaşmaları bu değişimden etkilenmezler! Çünkü  $B$ 'nin bir sayısı 7'den küçükse, 8'den de küçüktür; 8'den küçükse 7'den de küçüktür... Dediğimiz gibi yapalım ve 7'yle 8'in yerlerini değiştirelim:

$A$ :	3	5	7	12	14	16
$B$ :	2	4	9	11	13	18
$C$ :	1	6	8	10	15	17

Bu yeni zarlarda  $A-B$ ,  $B-C$  ve  $C-A$  karşılaşmaları hep aynı sonuçla, 19-17 biter. İsteddiğimiz gibi  $A$ ,  $B$ ,  $C$  zarı bulduk.

Okurun karşı geldiğini duyar gibi oluyorum. İlk denememdeki  $A$ ,  $B$ ,  $C$  zarlarını nasıl elde ettiğimi soruyordur. Bu zarları, sayıları rastgele dağıtarak bulduğuma inanmıyordu. Okur inanmamakta haklı. İlk zarları nasıl bulduğumu anlatmaya çalışayım.

Zarlardan herhangi ikisinin (7 ve 8 gibi) ardışık sayılar içermesi işime gelir. Hatta ikişer çift ardışık sayı içerseler daha iyi olur. Gerekirse birini, gerekirse öbürünü güçlendirmek için kullanırım. Böylece yanlış gidermem kolay olur, çünkü iki karşılaşmanın sonucunu değiştirmeden üçüncü karşılaşmanın sonucunu istediğim yönde değiştirebilirim. Bunu biliyorum. Dolayısıyla ilk denememde bunu sağlamaya çalışmalıyım. Sayıları zarlara şöyle dağıttım:

$B$ :						18
$C$ :					15	17

<sup>2</sup> Olasılık olarak sözediyorduk burda elbet. Yani  $A$ 'nın  $B$ 'yi yenme olasılığı  $1/2$ 'den büyük olsun.

<sup>3</sup> Eğer böyle 18 değişik sayı varsa, dilersek bu sayıları 1'den 18'e kadar alabiliriz.

A:	1			12	14	16
B:	2	4		11	13	
C:	3	5	7	10		
A:		6	8			
B:			9			

Yani şöyle:

A:	1	6	8	12	14	16
B:	2	4	9	11	13	18
C:	3	5	7	10	15	17

Bu zarlar aralarında oynarlarsa her karşılaşma 18–18 berabere biter... Oysa ben – örneğin –  $A$ 'nın  $B$ 'yi yenmesini istiyorum. 1'le 2'nin yerlerini değiştirirsem,  $A$ 'yı güçlendiririm,  $B$ 'yi zayıflatırım ve  $C$ 'nin sonuçlarını değiştirmem. Bu değiştirmeyi yapacak olursam  $A$ – $B$  karşılaşması istediğim gibi biter ve  $B$ – $C$  ve  $A$ – $C$  karşılaşmalarında bir değişiklik olmaz.  $B$ – $C$  karşılaşmasını  $B$ 'ye kazandırtmak için 4'le 5'in yerlerini değiştireyim. Böylece  $B$ – $C$  karşılaşmasını  $B$  kazanır ve  $A$ – $B$  karşılaşmasını hâlâ  $A$  kazanır, hem de aynı sonuçla. Son olarak,  $C$ – $A$  karşılaşmasını  $C$ 'ye kazandırtmak için 7'yle 8'in yerlerini değiştirebilirim. Sonuç olarak şu zarları elde ederim:

A:	2	6	7	12	14	16
B:	1	5	9	11	13	18
C:	3	4	8	10	15	17

Ve şu sonuçları elde ederiz:

$A$ – $B$ :	19–17
$B$ – $C$ :	19–17
$C$ – $A$ :	19–17

İstedığımız de buydu zaten.

Üstelik her üç zarın ortalama sayısı aynı:  $57/6 = 9,5$ . Acaba bu bir rastlantı mı?

İkinci Soru. Aynı şeyi dört zarla yapın. Üstlerinde 1'den 24'e kadar tüm sayıların bulunduğu öyle dört  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  zarı bulun ki  $A$ – $B$ ,  $B$ – $C$ ,  $C$ – $D$  ve  $D$ – $A$  karşılaşmalarının sonucu 19–17 olsun. Ve ayrıca  $A$ – $C$  ve  $B$ – $D$  karşılaşmalarının sonucu 18–18 olsun!

İkinci Sorunun Yanıtı. Yukardaki yöntemi deneyelim. Bakalım olacak mı?

C:						24
D:					20	23
A:	1			16	19	22
B:	2	5		15	18	21
C:	3	6	9	14	17	
D:	4	7	10	13		
A:		8	11			
B:			12			

Yani zarlarımız şöyle:

A:	1	8	11	16	19	22
B:	2	5	12	15	18	21
C:	3	6	9	14	17	24
D:	4	7	10	13	20	23

Karşılaşmaların sonuçlarını da yazalım:

$A-B$ : 19-17  
 $B-C$ : 18-18  
 $C-D$ : 17-19  
 $D-A$ : 18-18  
 $A-C$ : 19-17  
 $B-D$ : 19-17

Tam istediğimiz gibi olmadı ama pek uzak sayılmayız.  $A-B$  karşılaşması tam istediğimiz gibi sonuçlandı: 19-17. Ama öbür karşılaşmaların hiçbiri istediğimiz gibi sonuçlanmadı. İkinci ve üçüncü karşılaşmalara bakalım ilk olarak. İkinci karşılaşma 18-18 bitmiş, oysa biz  $B$ 'nin 19-17 kazanmasını istiyorduk. Demek ki  $B$ 'yi  $C$ 'den 1 sayı daha güçlü kılmalıyız. Üçüncü karşılaşma 17-19  $D$ 'nin lehine bitmiş, oysa biz tam tersini istiyorduk. Demek ki  $C$ 'yi  $D$ 'den 2 sayı daha güçlü kılmalıyız. Bu isteklerimizi ilk iki kolonla oynayarak yerine getirebiliriz:

$A$ : 1 8 11 16 19 22  
 $B$ : 4 5 12 15 18 21  
 $C$ : 3 7 9 14 17 24  
 $D$ : 2 6 10 13 20 23

Bu yeni zarlarla sonuçlar şöyle:

$A-B$ : 19-17  
 $B-C$ : 19-17  
 $C-D$ : 19-17  
 $D-A$ : 18-18  
 $A-C$ : 19-17  
 $B-D$ : 18-18

Dördüncü ve beşinci karşılaşmalar hâlâ daha istediğimiz gibi değil. Örneğin  $A-C$  karşılaşmasını bir sayı farkla  $C$  kazanmış. Oysa biz bu karşılaşmanın 18-18 berabere bitmesini istiyorduk. Demek ki  $A$ 'yı  $C$ 'den 1 güçlendirmeliyiz. 7'yle 8'in yerlerini değiştirelim.  $A-D$  karşılaşmasını da yoluna koymak için 10'la 11'in yerlerini değiştirelim. İşte zarlar:

$A$ : 1 7 10 16 19 22  
 $B$ : 4 5 12 15 18 21  
 $C$ : 3 8 9 14 17 24  
 $D$ : 2 6 11 13 20 23

Bu yeni zarlarla sonuçlar şöyle:

$A-B$ : 19-17  
 $B-C$ : 19-17  
 $C-D$ : 19-17  
 $D-A$ : 19-17  
 $A-C$ : 18-18  
 $B-D$ : 18-18

Tam istediğimiz gibi...

Ayrıca her zarın ortalaması  $75/6$ 'dır. Yani averajda da eşitlik bozulmaz. Bu da mı rastlantı?

Yazının başında sorduğum satranç sorusunun yanıtını hâlâ daha bilmiyorum. Ama yukardaki bulgularım bana satrançta "daha iyi oyuncu" ilişkisinin bir tamsıralama olmadığını fısıldıyor. Kimi oyuncu oyun başında, kimi oyuncu oyun ortasında, kimi oyuncuysa oyun sonunda iyi olabilir. Kimi oyuncu savunmada iyidir. Kimisi hırslı oyuncuya karşı daha iyi oynar... Bir satranç oyununu kazandıran (ya da kaybettiren) birçok öge olduğundan, "daha iyi satranç oyuncusu" ilişkisinin bir tamsıralama olduğunu sanmıyorum.