Yakınsamak

Ali Nesin

Bu yazıda, ilerde sık sık kullanacağımız bir olguyu tanımlayacağız ve matematiğin en önemli kavramlarından birine (limit kavramına) değineceğiz.

Aslında okur anlatacağım kavramı sezgisel olarak biliyordur. Dolayısıyla, bu yazıyı anlamak daha sonraki yazıları anlamak için bir önkoşul değildir.

0'la 1 arasında herhangi bir sayı alalım. Diyelim 0,9'u aldık. Bu sayıyı kendisiyle tekrar tekrar çarpalım (hesap makinası yararlı olabilir!):

$0,9^{1}$	:	0,9
$0,9^{2}$	:	0,81
$0,9^{3}$	:	0,729
$0,9^{4}$	:	0,6561
$0,9^{5}$	:	0,59049
$0,9^{6}$	:	0,531441
$0,9^{7}$	:	0,4782969
$0,9^{8}$	:	0,43046721
$0,9^{9}$	:	0,387420489
$0,9^{10}$	:	0,348678440
	1	
$0,9^{15}$	:	0,205891132.
	..	
$0,9^{20}$	:	0,121576654.
	..	
$0,9^{25}$	:	0,071789798.
	..	
$0,9^{30}$	:	0,042391158.
	..	
$0,9^{35}$	:	0,025031555.
	..	
$0,9^{40}$	:	0,014780882.
	..	
$0,9^{45}$	:	0,008727963.
	..	
$0,9^{50}$	:	0,005153775.
	..	
$0,9^{60}$	:	0,00179701...
$0,9^{70}$	:	0,000626578.
	..	
$0,9^{80}$	:	0,000218474.
	..	
$0,9^{90}$	:	0,000076177.
	..	
$0,9^{10}$	:	0,000026561.

0 ..

Gördüğümüz gibi sayılar hep küçülüyorlar.

Acaba 0,9'un güçlerini dilediğimiz kadar küçültebilir miyiz?

Örneğin, yukarda da görüldüğü üzere 0,001'in altına indik:

$$0{,}9^{70} = 0{,}000626578... \leq 0{,}001$$

0,0001'in de altına indik:

$$0{,}9^{90} = 0{,}000076177... \leq 0{,}0001$$

Dilersek 0,00001 ve 0,000001'in de altına inebiliriz:

$$0{,}9^{110} = 0{,}000009261... \leq 0{,}00001$$
$$0{,}9^{132} = 0{,}000000912... \leq 0{,}000001.$$

Sıfıra hiç ulaşamayız ama sıfıra dilediğimiz kadar yaklaşabiliriz. Bu yazıda bunu kanıtlayacağız[1].

Öte yandan –1'e dilediğimiz kadar yaklaşamayız, örneğin –0,5'un altına inemeyiz, 0'ın altına bile inemeyiz. Küçülen bu sayılar –1'e elbet yaklaşırlar, ama dilediğimiz kadar yaklaşmazlar, –1'le aralarındaki uzaklık 1'den fazladır hep.

Diyelim ε çok küçük pozitif bir sayı, örneğin 0,000000000001, hatta daha da küçük, ama 0 değil... Öyle bir n tamsayısı bulabiliriz ki, $0{,}9^n$ sayısı ε'dan küçüktür…

Bu dediğim yalnızca 0,9 sayısı için değil, 0'la 1 arasındaki herhangi bir sayı için geçerlidir:

Teorem 1. *r, 0'la 1 arasında herhangi bir sayı olsun: $0 < r < 1$. ε, 0'dan büyük hangi sayı olursa olsun, öyle bir n tamsayısı vardır ki, $r^n < \varepsilon$ eşitsizliği geçerlidir. Yani, n'yi yeterince büyük seçersek, r^n sayılarını dilediğimiz kadar küçültebiliriz.*

Örneğin $r = 0{,}9$ ve $\varepsilon = 0{,}00001$ ise, yukarda gördüğümüz üzere, n'yi 110, hatta 110'dan büyük herhangi bir tamsayı alabiliriz.

Teoremin kanıtına başlıyorum.

Kanıt: r, $0 < r < 1$ eşitsizliklerini sağlayan bir sayı olsun. ε da 0'dan büyük herhangi bir sayı olsun. $r^n < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir n tamsayısı arıyorum. Bakalım bulabilecek miyim?

Aradığım n tamsayısını yavaş yavaş bulacağım. Önce bir önsav:

Önsav. $s > -1$ *herhangi bir sayıysa ve n herhangi bir doğal sayıysa,* $(1 + s)^n \geq 1 + ns$ *eşitsizliği geçerlidir.*

Önsav'ın Kanıtı: $s > -1$ herhangi bir sayı olsun.

Önsavı, n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Yani, önsavın önce $n = 0$ için geçerli olduğunu kanıtlayacağız; arkasından, önsavın herhangi bir n doğal sayısı için geçerli olduğunu varsayıp, bir sonraki doğal sayı olan $n + 1$ için geçerli olduğunu kanıtlayacağız[2].

Eğer $n = 0$ ise, $1 + s > 0$ olduğundan,

$$(1 + s)^n = (1 + s)^0 = 1 = 1 + 0s = 1 + ns$$

dir. Dolayısıyla, $n = 0$ ise önsav doğrudur.

---

[1] Meraklı okur, bu olguyu kendi başına, yazının devamını okumadan kanıtlamaya çalışmalı. Başaramayabilir. Önemli değil! Kanıtı daha kolay anlayacaktır.

[2] Tümevarımla kanıt yöntemi, *Sonsuz İniş ve Sonsuz Çıkış* adlı yazıda ayrıntılarıyla açıklanmıştır.

Şimdi önsavın n doğal sayısı için geçerli olduğunu varsayalım ve önsavı bir sonraki doğal sayı olan $n + 1$ için kanıtlayalım. Yani,

$$(1 + s)^n \geq 1 + ns$$

eşitsizliğini doğru varsayıp,

$$(1 + s)^{n+1} \geq 1 + (n+1)s$$

eşitsizliğini kanıtlayalım. Başlıyoruz:

$$(1+s)^{n+1} = (1+s)^n(1+s) \geq (1+ns)(1+s) = 1+ (n+1)s + ns^2 \geq 1 + (n+1)s.$$

Kanıtımız bitmiştir. (İlk eşitsizlikte tümevarım varsayımı olan $(1+s)^n \geq 1+ns$ eşitsizliğini ve $1+s > 0$ eşitsizliğini kullandık.) □

Teorem 1'in Kanıtı: Şimdi teoremimizi kanıtlayabiliriz.
r, 0'la 1 arasında bir sayı olsun, yani $0 < r < 1$ eşitsizliği sağlansın.
ε, 0'dan büyük herhangi bir sayı olsun.
$r^n < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir n doğal sayısı bulacağız.
Birkaç sayı tanımlayalım:

- $s = \dfrac{1-r}{r}$ olsun. s pozitif bir sayıdır.
- m, $1/s$'den büyük bir tamsayı olsun, yani $ms \geq 1$ eşitsizliği doğru olsun.
- k, $\varepsilon \geq 1/k$ eşitsizliğini sağlayan bir doğal sayı olsun. Böyle bir k doğal sayısı vardır elbet. Örneğin, $\varepsilon = 0{,}0000375$ ise, k'yı 100.000 alabiliriz.
- $n = (k - 1)m$ olsun.

Şimdi bakalım her şey yolunda mı:

$$r^n = \frac{1}{(1/r)^n} = \frac{1}{\left(\dfrac{r + (1-r)}{r}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1-r}{r}\right)^n} = \frac{1}{(1+s)^n} \leq \frac{1}{(1+ns)}$$
$$= \frac{1}{(1 + (k-1)ms)} \leq \frac{1}{(1 + (k-1))} = \frac{1}{k} \leq \varepsilon.$$

Evet, her şey yolundaymış[3]. Dilediğimizi kanıtladık. □

Matematikte bu şöyle dile getirilir: n sonsuza gittiğinde, r^n sayı dizisi 0'a yakınsar[4]. Ve şöyle yazılır:

$$\lim_{n \to \infty} r^n = 0.$$

Yani aslında aşağıdaki teoremi kanıtladık:

Teorem 2. *Eğer* $0 < r < 1$ *ise,* $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$*'dır.* □

Bir başka sayı dizisine bakalım: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5,... Bu sayı dizisi de 0'a yakınsar. Örneğin, 1.000.001'inci terim 0,000001'in altına girer. Genel olarak pozitif bir ε sayısının altına girebilir miyiz? Evet! Eğer n, $1/\varepsilon$'dan büyük bir tamsayıysa (ki öyle bir tamsayı vardır elbet), $1/n$, ε'dan küçük olur. Aşağıdaki teoremi kanıtladık:

---

[3] Bu eşitsizliklerde sayıların tanımlarını ve önsavı kullandık.

[4] Tam matematiksel tanım şöyledir: Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $|a_m - \ell| < \varepsilon$ eşitsizliğinin her $m > n$ için sağlandığı bir n sayısı varsa, $(a_n)_n$ sayı dizisi ℓ'ye yakınsar denir.

Teorem 3. $\lim_{n \to \infty} 1/n = 0$. □

$1/n$ dizisi 0'a yakınsadığından, $1/n^2$, $1/n!$ gibi diziler de 0'a yakınsarlar çünkü bu sayılar $1/n$'den daha küçüktürler[5].

Teorem 4. $\lim_{n \to \infty} 1/n^2 = \lim_{n \to \infty} 1/n! = 0$. □

[5] Eğer n pozitif bir doğal sayıysa, $n!$ sayısı $1 \times 2 \times ... \times n$ olarak tanımlanır. Örneğin, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$'tür. $0!$ sayısı, ayrıca, 1 olarak tanımlanır.