

Üç Oyun

Ali Nesin

Birinci Oyun. Oyunumuz en az iki kişi arasında oynanıyor. Ne iskambil kâğıdına ne kalem kâğıda ne de bir tahtaya gereksinim var bu oyunu oynamak için. Yolda, otobüste, vapurda, sinemada, tiyatrodada, tarlada, fabrikada, atölyede, her yerde oynayabilirsiniz.

Biz oyunu iki kişi arasında oynatacağız ve açıklaması kolay olsun diye çakıl taşları kullanacağız. Ama dediğim gibi, bu oyunu oynamak için hiçbir gerece gereksinim yok.

Belli bir sayıda çakıl taşı koyun ortaya. Her oyuncu sırası geldiğinde bu kümeden 1, 2 ya da 3 çakıl taşı alacak. Oynayamayan, yani yapacak hamle bulamayan ilk oyuncu oyunu kaybeder. Bir başka deyişle, kümede çakıl taşı bırakmayan oyuncu oyunu kazanır.

Örneğin, oyunun başında 4 taş varsa, oyuna başlayan oyuncu oyunu kaybeder. 1 taş alsın, öbür oyuncu kalan 3 taş alır. 2 taş alsın öbür oyuncu kalan 2 taş alır. 3 taş alsın, öbür oyuncu kalan tek taş alır. Demek ki 4 taşlı oyunda, eğer ikinci oyuncu iyi oynarsa, birinci oyuncu oyunu kaybeder.

6 taşlı oyunları – iyi oynarsa – birinci oyuncu kazanır. Öbür oyuncu nasıl oynarsa oynasın, birinci oyuncu hep kazanacak hamleyi bulur. Nasıl mı kazanır? İlk hamlesinde 2 taş alır kümeden. Geriye 4 taş kalmıştır. Sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu 4 taşlık bir oyuna başlayacak ve yukarıda gördüğümüz gibi oyunu kaybedecek.

Bu yazıda şu soruyu yanıtlayacağız: **Birinci oyuncu kaç taşlı oyunları kazanır?** Yani oyunda kaç taş olmalıdır ki, ikinci oyuncunun hamleleri ne olursa olsun, birinci oyuncu hep kazanacak hamleleri bulabilsin¹?

Birinci Oyunun Stratejisi. Hemen yanıtı vereyim: Eğer kümedeki taş sayısı dörde bölünmüyorsa oyunu birinci oyuncu (iyi oynarsa elbet) kazanır. Eğer kümedeki taş sayısı dörde bölünüyorsa oyunu ikinci oyuncu (iyi oynarsa) kazanır. Örneğin 25, 26, 27 taşlık oyunları birinci oyuncu kazanır; 24, 28, 32 taşlık oyunlarıysa ikinci oyuncu kazanır.

Neden? Ve nasıl?

Kümede 1, 2 ya da 3 taş varsa, oyunu oyuna başlayan oyuncu kazanır: taşların hepsini birden alır; ortada taş kalmadığından ikinci oyuncu oynayamaz ve oyunu kaybeder.

Eğer kümede 4 taş varsa, oyuna başlayan oyuncu oyunu kaybedecektir. Çünkü birinci oyuncu öbür oyuncuya ya 1 ya 2 ya da 3 taşlık bir oyun sunmak zorundadır. Öbür oyuncu bütün taşları toplayıp kümede taş bırakmayabilir, yani oyunu kazanabilir.

Eğer kümede 5, 6 ya da 7 taş varsa, oyuna başlayan oyuncu oyunu kazanır. Çünkü bu oyuncu, gerektiği kadar taş alıp, oyunu 4 taşlık bir oyuna dönüştürebilir. Öbür oyuncu 4 taşlık bir oyunun birinci oyuncusu olmak zorunda ve yukarıda gördüğümüz gibi oyunu kaybeder.

Eğer kümede 8 taş varsa, oyuna başlayan oyuncu oyunu 5, 6 ya da 7 taşlık bir oyuna dönüştürmek zorundadır. Öbür oyuncu bu 5, 6 ya da 7 taşlık oyunun birinci oyuncusu olacak ve dolayısıyla – iyi oynayarak – kazanacaktır. Yukarıda da açıkladığımız gibi, öbür oyuncu kendisine sunulan bu oyunu 4 taşlı bir oyuna dönüştürecektir (başka türlü oynarsa kaybeder.) Demek ki 8 taşlı oyunu birinci oyuncu kaybeder.

Artık oyunu kimin ve nasıl kazanacağı belli olmuştur sanırım. Oyunda hep dörde bölünen bir sayıda taş bırakmaya çalışalım. Bunu başarabilirsek oyunu kazanırız. Örneğin 27 taşlı bir

¹ Bu oyunun çok benzeri bir oyundan, [11]'in *Matematik ve Korku* adlı yazısında söz etmişim.

oyun oynuyorsak ve sıra bizdeyse, 3 taş almamızdır. Eğer sıra bizde değilse, öbür oyuncunun hata yapmasını beklemekten başka çaremiz yok. Diyelim sıra bizdeydi ve 3 taş aldık. Öbür oyuncuya 24 taş kaldı. O oyuncu kaç taş alırsa alsın, sıra bize geldiğinde, oyunu 20 taşlık bir oyuna çevirmeliyiz. Bir sonraki oyunumuzda da oyunu 16 taşlık bir oyuna çevirmeliyiz. Böyle gide gide öbür oyuncu ya 12, 8, 4 ve 0 taşlık oyunlar kalır.

Eğer önünüze dörde bölünen sayıda taş gelmişse, 1 taş alın ki taş sayısı fazla azalmasın. Böylece öbür oyuncunun hata yapma olasılığını artırmış olursunuz.

Biraz Sohbet. Bu oyunu çözmek için, her hamleden sonra oyunun bir başka oyuna dönüştüğü olgusunu kullandık. Örneğin 27 taşlık bir oyun, bir sonraki hamlede 26, 25 ya da 24 taşlık bir oyuna dönüşür. Ama 27 taşlık oyunun birinci oyuncusu bir sonraki oyunun ikinci oyuncusu olacaktır.

Eğer A oyununu oynuyorsak ve sıra bizdeyse, yapabileceğimiz hamlelere bakalım. Diyelim yapabileceğimiz beş hamle var. Her hamlemizden sonra oyun bir başka oyuna dönüşecektir. Bu oyunlara B_1, B_2, B_3, B_4 ve B_5 oyunları diyelim. Öbür oyuncuya bu oyunlardan birini sunacağız ve öbür oyuncu kendisine sunulan bu oyunun birinci oyuncusu olacak. Eğer B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 oyunlarından birinde ikinci oyuncu kazanıyorsa, A oyununu kazanmak için, A oyununu bu oyuna dönüştürecek hamleyi yapmalıyız.

Yukardaki örnekte A , 27 taşlı oyun. Yapabileceğimiz üç hamle var: 1, 2 ya da 3 taş alabiliriz. B_1, B_2, B_3 sırasıyla 26, 25 ve 24 taşlı oyunları simgelesin. B_3 oyununda ikinci oyuncu kazandığından, 3 taş almamızdır.

Sihirbazlık kitaplarında yeni yetme sihirbazlara şu öğüt verilir: Bir sihirbazlığı iki kez üstüste aynı topluluk önünde yapmayın. “Buna çok benzer bir sihirbazlık daha biliyorum,” deyip bir başka sihirbazlık gösterin. Yoksa foyanız ortaya çıkabilir.

Aynı öğüdü ben de vereceğim. Bu oyunu birkaç kez üstüste aynı kişiyle oynarsanız, öbür oyuncu bir süre sonra yönteminizi anlayabilir. Onun için oyunu değiştirin. Örneğin aşağıdaki oyunlardan birini önerin.

- a. Aynı oyun, ama bu kez her oyuncu 1, 2, 3 ya da 4 taş alabilir.
- b. Aynı oyun, ama bu kez her oyuncu 2, 3 ya da 4 taş alabilir. Bu oyunda 1 taş bırakan oyuncu oyunu kazanır, çünkü öbür oyuncunun yasal hamlesi kalmamıştır.
- c. Aynı oyun, ama bu kez her oyuncu 1, 3 ya da 5 taş alabilir.
- ç. Aynı oyun, ama bu kez her oyuncu 2, 4 ya da 6 taş alabilir.
- d. Aynı oyun, ama bu kez her oyuncu 1, 2 ya da 4 taş alabilir.
- e. Yukardaki oyunların “negatif”ini oynayın. Yani aynı oyun, ama en son taşı alan bu kez kaybediyor...

e. Bu kez taş ekleyelim. Başlangıçta yerde hiç taş olmasın. Her iki oyuncu da, sırası geldiğinde yere 1’den 10’a kadar dilediği kadar taş ekleyebilir. Örneğin yerdeki taş sayısını 100 yapan ilk oyuncu oyunu kazansın...

Söylemeye gerek var mı? Bu oyunları önermeden önce nasıl kazanacağınızı bulmalısınız.

İkinci Oyun. Yukardaki oyun basit geldiyse, kuralları biraz zorlaştıralım. Oyunu gene iki kişi arasında ve çakıl taşlarıyla oynatacağız. Oyuncular gene ortadaki kümeden 1, 2 ya da 3 taş alabilecekler. Gene yapacak hamle bulamayan ilk oyuncu oyunu kaybedecek...

Ancak bir kuralımız daha var bu kez. Oyuncular bir önceki oyuncunun aldığı taş kadar taş alamazlar yerden. Örneğin bir hamlenizde 2 taş almışsanız, bir sonraki hamlede öbür oyuncu 2

taş alamaz, 1 ya da 3 taş alabilir ancak. Oyuna başlayan oyuncunun böyle bir kısıtlaması yoktur elbet.

Bir önceki oyunda olduğu gibi, bütün taşları aldığımızda oyunu kazanırız. Ama, 1 taş alarak kümede 1 taş bıraktığımızda da oyunu kazanırız. Çünkü öbür oyuncu yerdeki o tek taşı alamaz. Oyunun kuralları bu hamleyi engelliyor.

Gene aynı soruyu soruyoruz: **Bu yeni oyunu hangi oyuncu ve nasıl oynayarak kazanır?** Yanıt oyunun başındaki taş sayısına göre değişebilir elbet.

İkinci Oyunun Stratejisi. Bu oyunun da yanıtı yukardaki yanıt gibi: Taş sayısı dörde bölünmüyorsa oyunu birinci oyuncu kazanır, taş sayısı dörde bölünüyorsa oyunu ikinci oyuncu kazanır! Ve şaşılacak şey, bu oyunun stratejisi de yukardaki oyunun stratejisi gibidir, hatta daha da kolaydır!

4 taşlı oyunu birinci oyuncu kaybeder. 1 taş alsın, ikinci oyuncu kalan 3 taşı alır. 3 taş alsın, ikinci oyuncu kalan taşı alır. 2 taş alsın, ikinci oyuncu 2 taş alamaz ama 1 taş alabilir ve hatta 1 taş almak zorundadır. Birinci oyuncuya 1 taş kalır. Ama birinci oyuncu bu taşı alamaz, çünkü bir önceki hamlesinde ikinci oyuncu 1 taş almıştı. Birinci oyuncu oynayamadığından oyunu kaybeder.

Bu oyunda kazanmak için yukardaki stratejinin hemen hemen aynısını uygulamalıyız.

Diyelim 27 taşlı bir oyunda birinci oyuncuyuz. İlk oyundaki gibi 3 taş alalım ve öbür oyuncuya 24 taş bırakalım. Eğer öbür oyuncu 1 taş alırsa 3 taş alalım ve oyunu 20 taş indirgeyelim. Eğer öbür oyuncu 3 taş alırsa 1 taş alalım ve oyunu gene 20 taş indirgeyelim. Peki, ya öbür oyuncu 2 taş alıp oyunu 22 taş indirirse ne yapmalıyız? Yukardaki oyunu oynasaydık, biz de 2 taş alıp oyunu 20 taş indirirdik. Ne yazık ki 2 taş almaya kurallar izin vermiyor. Ya 1 ya 3 taş alacağız. Ne yapmalıyız? 1 taş mı almalıyız 3 taş mı?

Kaç taş alırsak alalım, önemli değil. Çünkü ne oynarsak oynayalım, öbür oyuncu bize dörde bölünen sayıda taş bırakamaz: Diyelim 1 taş aldık ve geriye 21 taş kaldı. Öbür oyuncu 1 taş alamayacağından oyunu 20 taş indirgeyemez. Diyelim 3 taş alıp oyunu 19 taş indirgedik. Öbür oyuncu 3 taş alamayacağından oyunu 16 taş indirgeyemez.

Eğer bu yöntemi uygularsak, her zaman dörde bölünen sayıda taş bırakamayabiliriz ama, öbür oyuncunun bize dörde bölünen sayıda taş bırakmasını engelleriz. Böylece hiçbir zaman dörde bölünen sayıda taş gelmez önümüze. Dolayısıyla hiçbir zaman 0 taşlı bir oyun devralmayız (0 dörde bölünür!) ve taş yokluğundan oyunu kaybedemeyiz.

Peki, bu yöntemle oynayarak, önümüze 1 taş gelip de bu taşı alamadığımızdan oyunu kaybettiğimiz olur mu? Olmaz. Neden olmaz? Çünkü önümüze 1 taş gelmişse ve bu taşı alamıyorsak, bir önceki hamlede öbür oyuncu kümeden 1 taş almış demektir. Demek ki bu oyuncuya 2 taşlı bir oyun devretmişizdir. Öbür oyuncu bu 2 taşı alabilseydi alırdı. Almadığına göre bir önceki hamlemizde 2 taş almışızdır. Demek ki bir önceki oyunda önümüzde 4 taş varmış. Yani, önümüze 4 taşlı bir oyun sunulmuş bir an! Ama önümüze dörde bölünen sayıda taş bırakılamayacağını biraz önce kanıtlamıştık. Demek ki böyle de kaybedemeyiz. Demek ki hiçbir türlü kaybedemeyiz. Demek ki bu stratejiyle oyunu kazanırız.

Sonuç olarak hep dörde bölünen bir sayıda taş bırakmalıyız. Oyunun kuralları bunu engelliyorsa, ne yaparsak yapalım önemli değildir.

Bu son dediğim pek doğru değil... Eğer önümüze gelen oyunun taş sayısı dörde bölünüyorsa, 2 taş almamalım. Çünkü 2 taş alırsak, öbür oyuncunun yanlış yapmasına olanak yoktur. Ya 1 ya 3 taş alalım.

Bir önceki oyunun yöntemini öbür oyuncu bir iki kez oynadıktan sonra kolayca anlayabilir. Bu oyunun yöntemini öbür oyuncunun anlaması daha zordur. Çünkü oyunun kimi aşamalarında

ister 1 ister 3 taş alabiliriz. Kimileyin 1, kimileyin 3 taş olarak yöntemimizi uzun zaman öbür oyuncudan gizleyebiliriz.

Doğru Yanıtı Nasıl Buldum? Bu yazıyı az kalsın burda kesecektim. Biraz düşününce, bu yazıyı burda kesmenin yalan söylemek olacağını anladım. Çünkü doğru stratejiyi nasıl bulduğumdan, geçtiğim süreçlerden söz etmedim.

Yukardaki oyunda hangi oyuncunun nasıl oynarsa kazanacağını nasıl buldum? Okur, anlattığımı hemen bulduğumu sanıyorsa yanılıyor. Tereyağından kıl çeker gibi olmadı. Geçtiğim aşamaları teker teker yazayım:

1. Önce oldukça uzun süren hesaplar yaparak oyunu kimin ve hangi stratejiyle oynayarak kazanacağını buldum. Ama bulduğum strateji yukardaki gibi yalın değildi. Doğru olmasına doğruydu ama karmaşık bir biçimde ifade edilmişti. Stratejinin doğru strateji olduğunun kanıtı da oldukça karmaşıktı. Hiç de güzel bir kanıt değildi. Hatta öylesine çirkindi ki, bir ara bu yazıyı yazmaktan vazgeçmiştim.

2. Bulduğum stratejiyi birkaç kez gözden geçirince stratejiyi daha yalın bir biçimde ifade edebileceğimi gördüm.

3. Bu yalın ifadeyi gene yalın bir biçimde kanıtlamaya çalıştım. Bu pek zor olmadı ve yukardaki kanıtı buldum.

Yazımın yukardaki bölümünde 2 ve 3 sayılı aşamaların sonuçlarını okudunuz. Birinci aşamayı sizden gizledim. Yani sonucu bulmak için çektiğim güçlükleri göstermedim. Yazının bundan sonraki bölümünde o ilk aşamayı anlatacağım.

Ancak ilk aşamayı anlatmadan önce şunu söylemeliyim: Birinci aşamayı atlayıp doğrudan ikinci aşamaya geçebilen matematikçiler, hatta öğrenciler vardır. Ama böyle insanlar azınlıktadır. Genellikle matematikçilerin ilk çözümleri oldukça karmaşıktır. Matematikçiler buldukları ilk çözümü açıklamazlar. Nasıl bir ressam tablosuyla birlikte tablosunun eskizlerini sergilemezse, bir matematikçi de kanıtladığı teoremlerle birlikte önüne çıkan zorlukları sergilemez. Teoremin en kısa, en öz, en yalın ve en güzel kanıtını açıklamakla yetinir. Bu kuralı bu yazımda bozarak, yazının süreğinde doğru yanıtı bulmak için geçtiğim evreleri açıklayacağım. Kendimi yinelemem için, yukardaki oyuna benzer bir oyun ele alacağım. Hep birlikte doğru stratejiyi ve bu stratejinin neden doğru olduğunu bulacağız.

Üçüncü Oyun. *Bu oyun da yukardaki oyun gibi, ancak iki oyuncunun peşpeşe aldıkları taş sayısının toplamı 4 olamaz. Yani bir oyuncu 1 taş almışsa sonraki oyuncu 3 taş alamaz, 2 taş almışsa sonraki oyuncu 2 taş alamaz, 3 taş almışsa sonraki oyuncu 1 taş alamaz. Hamle yapamayan oyunu kaybediyor. Oyunu hangi oyuncu nasıl oynayarak kazanır?*

Üçüncü Oyunun Stratejisi. Doğru yanıtı hemen vermeyeceğim. Türlü güçlüklerden geçtikten sonra hep birlikte bulacağız.

Başlangıçta n taş olan oyunlara A_n oyunu diyelim. A_n oyununu kimin nasıl oynayarak kazandığını bulmaya çalışıyoruz.

Eğer n küçük bir sayıysa, yani oyunumuzda az taş varsa, yanıtı bulmak zor değil. Örneğin, A_1, A_2, A_3 oyunlarını birinci oyuncu bütün taşları alarak kazanır. A_4 oyununu da birinci oyuncu kazanır, hem de ne oynarsa oynasın kazanır. Öte yandan A_5 oyununu ikinci oyuncu kazanır.

A_n oyununa başlayan oyuncuya **Bülent** diyelim. A_n oyununun ikinci oyuncusuna da **İhsan** diyelim. Demek ki A_1, A_2, A_3, A_4 oyunlarını Bülent kazanır. A_5 oyununuysa İhsan kazanır.

Her oyunun bir değeri olsun. Eğer Bülent'in kazanan bir stratejisi varsa oyunun değeri 1 olsun. Bülent'in kazanan bir stratejisi yoksa, yani İhsan'ın kazanan bir stratejisi varsa² oyunun değeri 0 olsun. Bu tanıma göre, A_1 , A_2 , A_3 ve A_4 oyunlarının değeri 1'dir. Öte yandan A_5 oyununun değeri 0'dır. A_n oyununun değerini a_n 'yle simgeleyelim. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_3 &= 1 \\ a_4 &= 1 \\ a_5 &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri doğrudur. a_n sayılarını bulacağız. Bu değerleri bulduğumuzda strateji hemen hemen kendiliğinden belli olacak.

Yukarda, her oyunun, her hamleden sonra bir başka oyuna dönüştüğünü söylemiştik. A_n oyunu ilk hamleden sonra hangi oyuna dönüşür? Diyelim A_{27} oyununda Bülent 1 taş aldı. Şimdi oyunda 26 taş var. Ama bu yeni oyun A_{26} oyunu değildir. Çünkü A_{26} oyununun birinci hamlesinde 3 taş alınabilir, oysa A_{27} 'nin yolaçtığı yeni oyunun ilk hamlesinde 3 taş alınamaz. Bu yeni oyuna $B_{26,1}$ diyelim. $B_{26,1}$ oyunu A_{26} oyunu gibi, aralarındaki tek ayrım $B_{26,1}$ oyununda birinci oyuncunun 3 taş alamayacağı kuralı.

A_{27} oyununda, Bülent 1 taş alırsa oyunun $B_{26,1}$ oyununa dönüştüğünü söyledik. Bülent 2 taş aldığı anda ortaya çıkan yeni oyuna $B_{25,2}$ diyelim. Ve Bülent 3 taş aldığı anda ortaya çıkan oyuna $B_{24,3}$ diyelim. Görüldüğü gibi, ilk sayı oyundaki taş sayısını gösteriyor. İkinci sayıysa o oyuna kaç taş alınarak geldiğini gösteriyor.

Genel olarak, A_n oyununda Bülent 1, 2 ve 3 taş alıp İhsan'a sunduğu oyunlara sırasıyla,

$$B_{n-1,1}, B_{n-2,2} \text{ ve } B_{n-3,3}$$

diyelim. $B_{n,1}$ oyunuyla A_n oyunu arasındaki tek ayrım, $B_{n,1}$ oyununda birinci oyuncunun 3 taş almasını yasaklayan kural.

$B_{n,1}$ oyununda ilk oyuncu 2 taş alırsa, oyun $B_{n-2,2}$ oyununa dönüşür elbet.

A_n oyununu Bülent nasıl kazanabilir? Eğer İhsan'a sunacağı

$$B_{n-1,1}, B_{n-2,2}, B_{n-3,3}$$

oyunlarından birinde ikinci oyuncu kazanıyorsa kazanır, yoksa kaybeder. Örneğin $B_{n-2,2}$ oyununu ikinci oyuncu kazanıyorsa, Bülent, 2 taş alarak A_n oyununu $B_{n-2,2}$ oyununa dönüştürür. Dolayısıyla A_n oyununun değerini (yani a_n sayısını) bulmak için $B_{n-1,1}$, $B_{n-2,2}$ ve $B_{n-3,3}$ oyunlarının değerlerini bulmak gerekir. Bu değerlere sırasıyla $b_{n-1,1}$, $b_{n-2,2}$, $b_{n-3,3}$ diyelim. Eğer $B_{n-1,1}$ oyununu birinci oyuncu kazanıyorsa, $b_{n-1,1} = 1$ 'dir, yoksa $b_{n-1,1} = 0$ 'dir.

$b_{n,1}$, $b_{n,2}$ ve $b_{n,3}$ sayılarını küçük n 'ler için hesaplamak zor değildir. Örneğin $b_{2,2} = 0$ 'dır, çünkü ortada 2 taş vardır ve birinci oyuncu 2 taş alamaz, 1 taş almak zorundadır. İkinci oyuncu kalan taşı alarak oyunu kazanır.

$n = 1, 2, 3$ için bu sayıları bulalım:

n	$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	$b_{n,3}$	a_n
1	1	1	0	1
2	1	0	1	1
3	0	1	1	1

$n > 3$ ise bu sayıları nasıl bulabiliriz?

² İki oyuncudan birinin kazanan bir stratejisi olduğu [11]'in üçüncü basımındaki Nim yazısında kanıtlanmıştır.

$B_{n,1}$ oyununun $B_{n-1,1}$ ve $B_{n-2,2}$ oyunlarından birine dönüşeceğini biliyoruz. ($B_{n-3,3}$ oyununa dönüşemez.) Dolayısıyla bu iki oyundan birinde birinci oyuncu kaybediyorsa, $B_{n,1}$ oyununu birinci oyuncu kazanır. Yani $b_{n,1}$ 'in 1 olması için gerekli ve yeterli koşul, $b_{n-1,1}$ ve $b_{n-2,2}$ sayılarından birinin 0 olmasıdır. Bunu cebirsel olarak ifade edersek,

$$b_{n,1} = 1 - b_{n-1,1}b_{n-2,2}$$

eşitliğini buluruz. (Okur biraz düşünsün burda.) $b_{n,2}$, $b_{n,3}$ ve a_n için de buna benzer eşitlikler bulmak pek zor değildir.

$$b_{n,1} = 1 - b_{n-1,1}b_{n-2,2}$$

$$b_{n,2} = 1 - b_{n-1,1}b_{n-3,3}$$

$$b_{n,3} = 1 - b_{n-2,2}b_{n-3,3}$$

$$a_n = 1 - b_{n-1,1}b_{n-2,2}b_{n-3,3}$$

Şimdi yukardaki tabloyu $n > 3$ için sürdürebiliriz. Örneğin,

$$b_{4,1} = 1 - b_{3,1}b_{2,2} = 1$$

eşitliğini bulabiliriz. İşte tablonun ilk onbeş sırası:

n	$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	$b_{n,3}$	a_n
1	1	1	0	1
2	1	0	1	1
3	0	1	1	1
4	1	1	1	1
5	0	0	0	0
6	1	1	0	1
7	1	0	1	1
8	0	1	1	1
9	1	1	1	1
10	0	0	0	0
11	1	1	0	1
12	1	0	1	1
13	0	1	1	1
14	1	1	1	1
15	0	0	0	0

Tabloyu daha fazla sürdürmeye gerek yok çünkü kolayca görülebileceği gibi ilk beş sırayla ikinci beş ve üçüncü beş sıralar birbirlerinin aynısı. Tablo böylece sonsuza değin sürer.

Yukardaki tablodan da kolayca anlaşılacağı gibi, eğer n beşe bölünmezse $a_n = 1$, bölünürse $a_n = 0$ 'dır. Yani eğer taş sayısı beşe bölünmüyorsa oyunu Bülent kazanır, bölünüyorsa İhsan.

Şimdi sıra stratejiyi bulmaya geldi.

Diyelim 13 taşlı bir oyunun, yani A_{13} 'ün birinci oyuncusuyuz, yani Bülent'iz. $a_{13} = 1$ olduğundan, oyunu iyi oynayarak kazanabileceğimizi biliyoruz. Nasıl oynayarak kazanabiliriz? Bu oyunu $B_{12,1}$, $B_{11,2}$, $B_{10,3}$ oyunlarından birine dönüştürebiliriz. Hangisine dönüştürmeliyiz? Bu üç oyunun değerlerine, yani $b_{12,1}$, $b_{11,2}$, $b_{10,3}$ sayılarına bakalım. Bu sayılardan hangisi 0'dır? Yalnızca $b_{10,3}$ sayısı 0. Dolayısıyla 3 taş alıp oyunu $B_{10,3}$ oyununa dönüştürelim. Sıra öbür oyuncuda, yani İhsan'da. Öbür oyuncu ne oynarsa oynasın, oyunu kazanabileceğimizi biliyoruz. Diyelim öbür oyuncu 1 taş alarak oyunu $B_{9,1}$ oyununa dönüştürdü. Biz şimdi ya 2 ya 3 taş alabiliriz. 2 taş alırsak oyunu $B_{7,2}$ 'e, 3 taş alırsak $B_{6,3}$ 'e dönüştürürüz. Bu oyunların değerleri olan $b_{7,2}$ ve $b_{6,3}$ sayılarına bakalım. Bu iki sayıdan hangisi 0'dır? Her ikisi de. Demek ki ister 2 taş

alabiliriz, ister 3. Her iki durumda da oyunu iyi oynayarak kazanırız. Oyunu böyle oynarsak sonunda kazanırız.

Sanırım strateji belli olmuştur. Stratejimizi matematiksel olarak ifade edelim. Bunun için yukardaki tablonun birkaç satırını genelleşmiş olarak yazalım:

n	$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	$b_{n,3}$	a_n
$5k-2$	0	1	1	1
$5k-1$	1	1	1	1
$5k$	0	0	0	0
$5k+1$	1	1	0	1
$5k+2$	1	0	1	1
$5k+3$	0	1	1	1
$5k+4$	1	1	1	1

Eğer önümüzde $5k$ taşlı bir oyun varsa ve oynama sırası bizdeyse, ne oynarsak oynayalım, öbür oyuncu iyi oynarsa kaybedeceğimizi biliyoruz. Bu durumda kazanan bir strateji yoktur.

Diyelim önümüzde $5k+1$ 'lik bir oyun var. Eğer $B_{5k+1,1}$ oyunundaysak 1 taş almalıyız. Eğer $B_{5k+1,2}$ oyunundaysak gene 1 taş almalıyız. Her iki durumda da oyunu $5k$ 'lık bir oyuna dönüştürdük. Eğer $B_{5k+1,3}$ oyunundaysak oyunu öbür oyuncu iyi oynayarak kazanabilir. Dolayısıyla bu durumda kazanan strateji yoktur.

Okur, $5k+2$ ve $5k+3$ 'lük oyunlara bakarsa, bu oyunlarda da $5k$ taş bırakması gerektiğini anlayacaktır.

$5k+4$ taşlı oyunlarda istediğimizi oynayabiliriz! Ne oynarsak oynayalım oyunu kazanabiliriz.

Görüldüğü gibi öbür oyuncuya hep beşe bölünen sayıda taş bırakmalıyız. Eğer beşe bölünen sayıda taş bırakamıyorsak, ne yaptığımız önemli değildir pek.

Önünüze gelen oyunun taş sayısı beşe bölünüyorsa, tek umudunuz öbür oyuncunun bir yanlış yapması. Öbür oyuncunun yanlış yapmasına olanak tanımak için 1 taş almayın, çünkü 1 taş alırsanız, öbür oyuncunun her hamlesi doğru hamle olacaktır. Bu durumda ya 2 ya 3 taş alın. Alabilirseniz 2 taş alın ki oyundaki taş sayısı çok azalmasın ve öbür oyuncunun yanlış yapma olasılığı artsın.

Bu aşamadan sonra bu stratejinin neden doğru olduğunu **yalın** bir biçimde açıklamak gerekiyor. Bunu okura bırakıyorum.