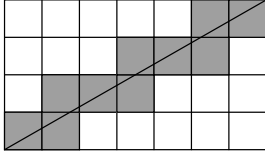


Tanju Ertunç'un Sorusu

Ali Nesin

O kurlarımdan Tanju Ertunç bir mektubunda şu soruyu sormuştu: $n \times m$ boyutunda bir dikdörtgen ele alalım. Bu dikdörtgenin köşegeni, dikdörtgenin nm karesinin kaç tanesinin içinden geçer? Köşegenin yalnızca köşelerine değen kareleri değil, gerçekten içinden geçen kareleri sayacağız.

Örneğin $n = 7, m = 4$ olsun.



7×4 boyutundaki dikdörtgenin köşegeni tam 10 karenin içinden geçiyor (o kareleri koyu renkte çizdim).

Herkesin anlayabileceği bu tür sorulara bayılırım. Bu güzel soruyla beni tanıştırdığı için Tanju Ertunç arkadaşına teşekkür ederim.

Genel bir formül bulmak ve formülü kanıtlamak, yani formülün neden doğru olduğunu herkesin anlayabileceği bir biçimde açıklamak gerekiyor. Matematiksel kanıtın özü de budur zaten: Bir akıl yürütmeyi herkesin anlayabileceği bir dilde yazmak.

Genellikle amatör matematikçiler böyle bir soru karşısında şu yöntemi izlerler: Önce birkaç örnek alırlar. Yukarıda, 7×4 boyutlu dikdörtgen örneğini almıştık. Amatör matematikçi bunun gibi birkaç örnek daha alır. Örneklere bakarak doğru formülü tahmin eder. Bu formül şimdilik yalnızca bir tahmindir, yani kanıtlanmamış bir savdır. Bu savın kanıtlanması gerekmektedir. İşte bu da ikinci aşamadır. Kısaca söylemek gerekirse, amatör matematikçi önce formülü birçok örnek alarak tahmin eder, sonra formülün doğru olduğunu kanıtlamaya çalışır.

Profesyonel bir matematikçi böyle yapmaz. Bir tek örnek alır, diyelim 7×4 boyutlu dikdörtgeni ele alır ve bu dikdörtgenin 7×4 boyutlu olduğunu unutup $n \times m$ boyutlu olduğunu varsayar. Arkasından formülü bulmaya çalışır. Eğer bulabilirse ne âlâ, çünkü formülü bulduğunda – soyut düşündüğünden, yani 7 ve 4 yerine n ve m aldığından – formülün doğruluğunu da kanıtlamış olur. Yani, profesyonel matematikçi bir taşla iki kuş vurur: Aynı anda hem formülü bulur, hem de formülün doğruluğunu kanıtlar.

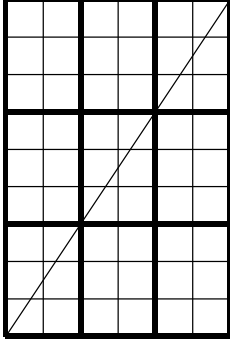
Kanıtlayabilirse...

Kimi zaman formülü bulmak kolay değildir. O zaman, profesyonel matematikçi, bir süre soyut düşündükten sonra, amatör matematikçi gibi örneklere başvurur. Ama profesyonel matematikçi ilk önce bir taşla iki kuş vurmaya çalışır.

Profesyonel bir matematikçi gibi davranalım.

Önce, a ve b sayılarının birbirlerine asal olduklarını (yani ortak bölenlerinin 1 olduğunu¹) varsayabileceğimizi görelim: Eğer a ve b sayıları bir k sayısına bölünüyorlarsa, $a \times b$ boyutlu dikdörtgeni $a/k \times b/k$ boyutlu k^2 dikdörtgene bölebiliriz, (aşağıdaki şekilde $k = 3$).

¹ Örneğin 4 ve 7 birbirine asal iki sayıdır. Ama 4 ve 6 birbirine asal değildir; 2, her ikisini de böler.



Ve $a \times b$ boyutlu bir dikdörtgen için hesaplamak istediğimiz sayı, $a/k \times b/k$ boyutlu bir dikdörtgen için hesaplamak istediğimiz sayının k katı olur. Demek ki hesabı $a/k \times b/k$ boyutlu bir dikdörtgen için yapmak yeterlidir. k 'yı a ve b 'nin en büyük ortak böleni olarak alırsak, a/k ve b/k sayıları birbirlerine asal olurlar. Dolayısıyla a ve b 'nin birbirlerine asal olduklarını varsayabiliriz. Bir başka deyişle, köşegenin dikdörtgenin içindeki bir tamnoktadan geçmediğini varsayabiliriz.

Köşegenin sol alt köşeden sağ üst köşeye doğru gittiğini düşünelim. Sol alt kareyi saymazsak, köşegen, bir kareye girmek için, o karenin bir kenarına dokunmak zorunda. Bu kenar dikey ya da yatay olabilir.

Köşegenin kestiği yatayları ve dikeyleri hesaplayalım. Toplam, $a + 1$ tane dikey kenar ve $b + 1$ tane yatay kenar var.

Köşegen soldan başlayıp sağa doğru gidiyor. İlk ve son dikeyleri saymazsak, köşegen $a - 1$ tane dikey kesmek zorunda.

Köşegen, aynı zamanda, en aşağıdan başlayıp ta en yukarı kadar çıkıyor. İlk ve son yatayları saymazsak, köşegen $b - 1$ tane yatay kesmek zorunda.

Bu iki sayıyı ($a - 1$ 'i ve $b - 1$ 'i) toplarsak, köşegenin değdiği kenar sayısını buluruz, yani hemen hemen köşegenin girdiği kare sayısını... Buna bir de ilk kareyi (sol alt kareyi) eklersek istediğimiz yanıtı buluruz:

$$(a - 1) + (b - 1) + 1.$$

Yani $a + b - 1$.

Bu, a ve b sayıları birbirlerine asal olduklarında bulunan yanıt. Eğer a ve b 'nin en büyük ortak böleni k ise, yukardaki formülü a/k ve b/k 'ya uygulayıp k 'yla çarparız. Yani köşegen tam

$$k(a/k + b/k - 1) = a + b - k$$

kenarı keser.

Örneğin, $n = 6$ ve $m = 9$ ise, o zaman $k = 3$ 'tür ve formüle göre, köşegen, $n + m - k = 6 + 9 - 3 = 12$ kenarı keser, ki yanıtın doğru olduğu yukardaki şekilden de belli.