# Sonsuz Toplamlar

**Ali Nesin**

Aşağıdaki sonsuz toplam sonlu mu, yoksa sonsuz mudur?

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + ...$$

Sonsuz tane sayıyı topladığımızda sonuç her zaman sonsuz bir sayı olmayabilir. Örneğin bu örnekte, sonsuz toplam sonlu bir sayıdır. Hangi sayı olduğunu birazdan söyleyeceğim.

Sonsuz toplamı bulmadan önce sonlu toplamları bulalım.

$1/1^2 = 1$
$1/1^2 + 1/2^2 = 1.25$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 = 1.361111...$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 = 1.423611...$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 = 1.463611...$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 = 1.491389...$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 = 1.511797...$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + 1/8^2 = 1.527422...$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + 1/8^2 + 1/9^2 = 1.539768...$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + 1/8^2 + 1/9^2 + 1/10^2 = 1.549768...$

Toplamlar gittikçe büyüyorlar. Doğru. Ama bu, sonsuz toplamın sonsuz olacağı anlamına gelmez. Örneğin, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999,... sayıları da durmadan büyürler, ama 1'i hiçbir zaman geçemezler[1].

Bilgisayarıma sonlu toplamları biraz daha hızlı hesaplattırdım:

$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 +...+ 1/100^2 = 1,634984...$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 +...+ 1/200^2 = 1,639947...$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 +...+ 1/300^2 = 1,641606...$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 +...+ 1/1000^2 = 1,643935...$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 +...+ 1/2000^2 = 1,644432...$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 +...+ 1/3000^2 = 1,644595...$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 +...+ 1/4000^2 = 1,644714...$
$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 +...+ 1/5000^2 = 1,644725...$

Sonlu toplamlar hâlâ daha durmadan büyüyorlar. Bundan daha doğal bir şey olamaz, çünkü hep pozitif sayıları topluyoruz. Bu sayıların 1,7'ye sanki hiç varamayacaklar gibi bir izlenim elde ettiniz mi? Ettiyseniz haklısınız. Çünkü bu sayılar sonsuzda $\pi^2/6$'ya, 1,644934067277794... sayısına eşit olurlar. Bir başka deyişle,

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots = \pi^2/6$$

eşitliği geçerlidir. Bunu, büyük matematikçi Euler kanıtlamıştır.

Bu eşitlik beni her zaman şaşırtmıştır. Soldaki sayının $\pi$'yle yani çemberle ne ilgisi olabilir?

Ne yazık ki yukardaki eşitliğin kanıtını burda veremeyeceğim, kanıt oldukça ileri düzeyde matematik (sanal analiz) gerektirir.

Peki $1/1^3 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + \ldots$ sonsuz toplamı nasıl bir sayıdır? $1/n^2 \geq 1/n^3$ olduğundan, bu yeni toplam $\pi^2/6$'dan daha küçük bir sayıdır. Bu sayının hangi sayı olduğu bilinmiyor. Nasıl bir sayı olduğu da bilinmiyor, tek bildiğimiz, bu sayının kesirli bir sayı olmadığı. Bu da, 1990'ların başında kanıtlandı.

---

1 Bu dizi sonsuzda 1 olur. Bir başka deyişle, 9/10 + 9/102 + 9/103 + ... sonsuz toplamı, yani 0,9999.... sayısı 1'e eşittir.

$1/1^4 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \dots$ sonsuz toplamının kaç olduğu biliniyor. Genel olarak, eğer $n$ çift bir sayıysa, $1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + 1/4^n + \dots$ sonsuz toplamının $\pi^2$'yle kesirli bir sayının çarpımı olduğu biliniyor, ama eğer $n \geq 5$ tek bir sayıysa, bu sonsuz toplam üzerine bir şey bilindiğini sanmıyorum.

Bir başka sonlu sonsuz toplam:

$$\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{5\times 7} + \frac{1}{9\times 11} + \frac{1}{13\times 15} + \dots = \frac{\pi}{8}$$

Nasıl, güzel değil mi? Böyle bir eşitliği ilk kez bulmak insana büyük bir haz verir.

Aşağıdaki sonsuz toplamı ele alalım şimdi: $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \dots$ Bu sonsuz toplam sonlu bir sayı mıdır? Yoksa sonsuz mudur?

Yavaş yavaş toplayalım:

$1/1 + 1/2 = 1{,}5$
$1/1 + 1/2 + 1/3 = 1{,}8333...$
$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = 2{,}08333...$
$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 = 2{,}28333...$
$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 = 2{,}45$
$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 = 2{,}592857143...$
$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 = 2{,}717857143...$
$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 = 2{,}828968254...$
$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 = 2{,}928968254...$

Bu toplamlar sonsuzda ne olurlar? Sonlu bir sayıya mı yakınsarlar, yoksa her sayı bir zaman sonra aşılır mı (yani sayılar sonsuza mı giderler)?

Örneğin, bu toplamlar bir zaman sonra 100'ü geçer mi? Geçerse ne zaman geçer?

Bilgisayarıma hesaplattım bu toplamları. Eğer

$$1/1 + 1/2 + ... + 1/n$$

sayısına $S_n$ diyecek olursak, bulduğum sonuçları daha rahatlıkla yazabilirim:

$S_2 = 1{,}5$
$S_3 = 1{,}833333...$
$S_4 = 2{,}083333...$
$S_5 = 2{,}283334...$
$S_6 = 2{,}45$
$S_7 = 2{,}592857...$
$S_8 = 2{,}717857...$
$S_9 = 2{,}828969...$
$S_{10} = 2{,}928968...$
$S_{11} = 3{,}019877...$
$S_{12} = 3{,}103211...$
$S_{13} = 3{,}180134...$
$S_{14} = 3{,}251562...$
$S_{15} = 3{,}318229...$
$S_{16} = 3{,}380729...$
$S_{17} = 3{,}439553...$
$S_{18} = 3{,}495108...$
$S_{19} = 3{,}54774\ ...$
$S_{20} = 3{,}59774\ ...$

Bilgisayarımda daha da ileri gittim. 4'ü ne zaman aştım biliyor musunuz? 31'inci toplamda:

$S_{30} = 3{,}994987...$
$S_{31} = 4{,}027246...$

Ya 5'i aştım mı? Aştım. Ama oldukça geç aştım. 83'üncü toplamda aşabildim ancak:

$$S_{82} = 4{,}990021...$$
$$S_{83} = 5{,}002069...$$

6'yı da aştım. 227'inci toplamda...

$$S_{226} = 5{,}999962...$$
$$S_{227} = 6{,}004367...$$

7'yi aşmak için çok bekledim. 7'yi ancak 616'ıncı terimde aşabildim:

$$S_{615} = 6{,}999652...$$
$$S_{616} = 7{,}001276...$$

8'i aşıp aşmayacağım merak konusu... Onu da aştım:

$$S_{1673} = 7{,}99989...$$
$$S_{1674} = 8{,}00048...$$

Ya 9? 9'u aşabilir miyiz? Ben aştım, daha doğrusu bilgisayarım aştı:

$$S_{4549} = 8{,}999995...$$
$$S_{4550} = 9{,}000215...$$

10'u, 11'i, 12'yi de aştım:

$$S_{12366} = 9{,}999969...$$
$$S_{12367} = 10{,}00005...$$
$$S_{33616} = 10{,}99998...$$
$$S_{33618} = 11{,}...$$
$$S_{91328} = 12{,}00001...$$

Her sayıyı bir zaman sonra aşacak mıyız?

Örneğin 100'ü aşacak mıyız?

Evet aşacağız! $1{,}5 \times 10^{43}$'üncü toplamdan sonra...

Baklayı ağzımdan çıkarayım: Yukardaki dizi sonsuza gider. Yani her sayıyı bir zaman sonra aşarız.

Kanıtlayalım.

Aşağıdaki tabloya bakın:

| | | |
|---|---|---|
| $1/3 + 1/4$ | $> 1/4 + 1/4$ | $= 1/2$ |
| $1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8$ | $> 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8$ | $= 1/2$ |
| $1/9 + 1/10 + ... + 1/16$ | $> 1/16 + 1/16 + ... + 1/16$ | $= 1/2$ |
| $1/17 + 1/18 + ... + 1/32$ | $> 1/32 + 1/32 + ... + 1/32$ | $= 1/2$. |

Bu hesaplardan sonra, $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + ...$ toplamının neden sonsuz olduğu anlaşılıyor:

$1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + ... + 1/8) + (1/9 + ... + 1/16) + (1/17 + ... + 1/32) + ... > 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + ....$

Sağdaki toplam sonsuz olduğundan, daha büyük olan soldaki toplam da sonsuzdur.

Her sayının tersini toplayacağımıza, asal sayıların terslerini toplayalım:

$$1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + 1/17 + ....$$

Asal sayı sayısı oldukça az olduğundan[2], bu toplam sonlu bir sayı olabilir, ama değil, bu toplam da sonsuz. Bu teorem de Euler'in.

---

[2] *Gerçekten Asal Var mı?* başlıklı yazımızda, asal sayıların yoğunluğunun 0 olduğunun kanıtını bulacaksınız. Yani, tüm sayılar arasından rastgele bir sayı seçecek olursak, bu sayının asal olma olasılığı yoktur!