Sonsuz İniş ve Sonsuz Çıkış

Ali Nesin

Sayılar kuramının matematikte yeri ayrıdır. Sayılar kuramı her şeyden önce güzeldir. Üstelik bir ilkokul çocuğunun bile anlayabileceği eşitlikler, teoremler, kanıtlar, sorular vardır.

Çoğumuzun matematikle ilgisi aritmetikle başlamıştır. Kimimiz $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ eşitliğinden, kimimiz $3^2 + 4^2 = 5^2$ eşitliğinden, kimimiz de,

$$1 = 1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

eşitliklerinden büyülenmişizdir. Sayılar kuramında her yaşa, her zevke göre büyü vardır.

Sonsuz Çıkış. Yukardaki eşitlikler raslantısal değildir: İlk n tek sayının toplamı her zaman bir karedir[1]. İlk n tek sayı $1, 3, 5, ..., 2n - 1$ olduğundan,

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

dir. Bu eşitlik, sayılar kuramında **tümevarım** adı verilen bir yöntemle kanıtlanabilir.

Matematikte ve sayılar kuramında çok sık kullanılan bu yöntemde, kanıtlanmak istenen önerme önce 1 sayısı için kanıtlanır. Sonra, önermenin n sayısı için geçerli olduğu varsayılarak, önerme bir sonraki sayı olan $n + 1$ sayısı için kanıtlanır. Böylece, önermenin tüm sayılar için geçerli olduğu anlaşılır. Çünkü, önerme 1 için doğrudur, 1 için doğru olduğundan 2 için de doğrudur, 2 için doğru olduğundan 3 için de doğrudur... Bu yönteme **sonsuz çıkış** da denilebilir.

Tümevarımla kanıta örnek olarak yukardaki eşitliği kanıtlayalım.

Teorem. *Her n sayısı için, ilk n tek sayının toplamı n^2'dir.*

Kanıt: İlk n tek sayının toplamına $T(n)$ adı verelim. Yani,

$$T(n) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$$

olsun. $T(n) = n^2$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz.

Önce $T(1) = 1^2$ eşitliğinin doğru olup olmadığına bakalım. $T(1)$, 1'den 1'e kadar olan tek sayıların toplamıdır, demek ki $T(1) = 1 = 1^2$ eşitlikleri geçerlidir. Demek ki önermemiz 1 için doğru.

Şimdi, $T(n) = n^2$ eşitliğini doğru varsayıp, $T(n + 1) = (n + 1)^2$ eşitliğini kanıtlayalım. $T(n + 1)$ sayısı ilk $n + 1$ tek sayının toplamı, yani 1'den $2n + 1$'e kadar olan tek sayıların toplamı. İlk n tek sayının toplamı $T(n)$'dir ve varsayımımıza göre bu $T(n)$ sayısı n^2'ye eşit. Bir sonraki $n + 1$'inci tek sayıysa $2n + 1$. Demek ki,

$$\begin{aligned} T(n + 1) &= \text{İlk } n + 1 \text{ tek sayının toplamı} \\ &= (\text{İlk } n \text{ tek sayının toplamı}) + (n+1\text{'inci tek sayı}) \\ &= T(n) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2 \end{aligned}$$

ve $T(n + 1) = (n + 1)^2$.

Demek ki $T(n) = n^2$ eşitliği doğruysa, $T(n+1) = (n+1)^2$ eşitliği de doğrudur.

Daha önce $T(1) = 1^2$ eşitliğinin de doğru olduğunu kanıtlamıştık.

Böylece her n sayısı için $T(n) = n^2$ eşitliği kanıtlanmış oldu.

---

[1] Bu yazıda "sayı" sözcüğünü bir ve birden büyük tamsayılar için kullanacağız, yani 1,2,3,4,... sayıları için.

Tümevarımla kanıtın bir zayıf yanı, kanıtlanan önermenin neden doğru olduğunun pek iyi anlaşılamamasıdır. Önsezi kaybolmakta, mekanik bir kanıt verilmektedir. Ne demek istediğimi gene bir örnekle anlatayım. Yukardaki $T(n) = n^2$ eşitliğinin neden doğru olduğunu başka türlü göstereyim. Bir kenarı n uzunluğunda olan bir kare alalım. Bu karenin alanı n^2'dir. Kareyi n^2 tane küçük kareye bölelim. Şimdi kareleri şöyle sayalım. (Aşağıdaki şekle bakın.) Sol alt köşede 1 kare var. Bu kareye 3 kare dokunur: biri sağından, biri tepesinden, öbürü de sağ üst köşesinden (yani çaprazından.) Bu yeni kareye 5 yeni kare dokunur: ikisi sağından, ikisi tepesinden, biri de çaprazından. Sonra 7 yeni kare... İşte resim:

7	6	5	4
5	4	3	3
3	2	2	2
1	1	1	1

1, 3, 5, 7, ... Bunların toplamı küçük karelerin sayısına, yani n^2'ye eşit. Görüldüğü gibi ilk n tek sayının toplamı n^2'dir. Yukardaki önermenin neden doğru olduğu birden gün gibi ortaya çıktı. Ama matematiksel değil kanıtımız. Görme duyusuna dayanıyor.

Daha sonra gereksineceğimiz bir sonucu tümevarımla kanıtlayalım:

Teorem. *m öğeli bir kümenin altküme sayısı 2^m dir.*

Kanıt: Önermeyi önce $m = 1$ için kanıtlayacağız. Eğer $X = \{x\}$ bir öğelik bir kümeyse, X'in iki tane altkümesi vardır: $\emptyset$ (boşküme) ve X. Demek ki $m = 1$ olduğunda önermemiz doğru.

Şimdi önermenin m için doğru olduğunu varsayıp, önermeyi bir sonraki sayı olan $m + 1$ için kanıtlayalım.

$$X = \{x_1, ..., x_m, x_{m+1}\}$$

olsun. X'in 2^{m+1} tane altkümesi olduğunu kanıtlamak istiyoruz.

$$Y = \{x_1, ..., x_m\}$$

olsun. Y'nin 2^m tane altkümesi olduğunu (m tane öğesi olduğundan, varsayımımıza göre) biliyoruz.

X'in iki tür altkümesi vardır: x_{m+1}'i içerenler ve içermeyenler. x_{m+1}'i içermeyenler Y'nin altkümeleridir ve bunlardan 2^m tane olduğunu biliyoruz. x_{m+1}'i içermeyen 2^m kümeye x_{m+1}'i de eklersek, x_{m+1}'i içeren tüm altkümeleri buluruz. Demek ki X'in x_{m+1}'i içermeyen 2^m tane ve x_{m+1}'i içeren gene 2^m tane altkümesi varmış. Dolayısıyla X'in altküme sayısı, $2^m + 2^m = 2 \times 2^m = 2^{m+1}$ dir. Önermemiz kanıtlanmıştır[2].

[2] Okur, bu olgudan $2^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}$ eşitliğini çıkarabilir (*Pokerin Matematiği* yazısında tanımlamıştık sağdaki sayıları.) Soldaki sayı, yani 2^m, m öğesi olan bir kümenin altküme sayısı. Sağdaki $\binom{m}{k}$ ise, aynı kümenin k öğeli altkümelerinin sayısı.

Alıştırma olarak, okur aşağıdaki önermeleri tümevarımla kanıtlamaya çalışabilir:

1. Eğer $0 < x < 1$ ise ve $n > 0$ bir doğal sayıysa,

$$(1-x)^n \le 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

2. Eğer $n > 0$ bir doğal sayıysa,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Eğer $n > 0$ bir doğal sayıysa,

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

4. Eğer $n > 0$ bir doğal sayıysa,

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

Sonsuz İniş. Pierre Fermat (1601–1665) sayılar kuramında **sonsuz iniş** adını verdiği bir başka yöntem bulmuştur. Sonsuz iniş, sonsuz çıkışın (yani tümevarımın) ters yüz edilmişidir. Önce yöntemi açıklayalım, sonra bir örnek vereceğiz.

Diyelim sayılarla ilgili bir önerme kanıtlamak istiyoruz. Bu önermeye $Ö(n)$ adını verelim. $Ö(n)$ önermesinin bir sayı için yanlış olduğunu varsayalım, diyelim a sayısı için yanlış. Demek ki $Ö(a)$ önermesinin yanlış olduğunu varsayıyoruz. Bu varsayımdan bir çelişki elde etmeye çalışırız. $Ö(a)$'nın yanlışlığından yararlanarak, öyle bir a_1 sayısı bulmaya çalışırız ki, hem $a_1 < a$, hem de $Ö(a_1)$ önermesi yanlıştır. Başardık diyelim. Aynı akıl yürütmeyi a yerine a_1 sayısı için yapacak olursak, öyle bir a_2 sayısı buluruz ki, hem $a_2 < a_1$'dir, hem de $Ö(a_2)$ önermesi yanlıştır. Bunu böyle sürdürebiliriz. Öte yandan doğal sayılarda sonsuza dek inemeyiz. 1 (ya da 0, yazarına ve yazısına göre değişir) en küçük doğal sayıdır. Bir çelişki elde ettik: Hem sonsuza dek inebiliyoruz, hem de inemiyoruz. Demek ki, $Ö(n)$ önermesi bir a sayısı için yanlış olamaz, yani her sayı için doğrudur.

Bu yöntemi şöyle de açıklayabiliriz: Eğer $Ö(n)$ önermesi bir sayı için yanlışsa, bu önermenin yanlış olduğu en küçük bir sayı vardır. Bu sayıya a adını verelim. Şimdi de $Ö(a)$ önermesinin yanlışlığından yararlanarak, a'dan küçük bir b sayısı için de önermenin yanlış olduğunu kanıtlamaya çalışalım. Başarırsak bir çelişki elde ederiz, çünkü, a, önermeyi yalanlayan sayıların en küçüğüydü.

Şimdi bir örnek vereyim. Sonsuz iniş yöntemini kullanarak $\sqrt{3}$ sayısının kesirli sayı olmadığını kanıtlayacağım[3]. Diyelim, a ve b sayıları $\sqrt{3} = a/b$ eşitliğini sağlıyor. $\sqrt{3} = a/b$ denkleminde iki tarafın da karesini alırsak, $3 = a^2/b^2$ buluruz, yani $3b^2 = a^2$. Bundan da a^2'nin üçe bölündüğü çıkar. a^2 üçe bölündüğünden, a sayısı da üçe bölünür. Dolayısıyla a^2 dokuza bölünür ve $3b^2 = a^2$ denkleminden b^2'nin de üçe bölündüğü anlaşılır. b^2 üçe bölündüğünden, b de üçe bölünür. Hem a'nın, hem de b'nin üçe bölündüğünü kanıtladık. Eğer $a = 3a_1$, $b = 3b_1$ olarak yazarsak, $\sqrt{3} = a/b = 3a_1/3b_1 = a_1/b_1$ elde ederiz. Yani $\sqrt{3} = a_1/b_1$. Ve aynı zamanda $0 < a_1 < a$. Yukarda a ve b sayılarıyla yaptığımız kanıtı, a_1 ve b_1 sayılarıyla yaparsak, öyle a_2, b_2 sayıları buluruz ki, hem $0 < a_2 < a_1 < a$ dır, hem de $\sqrt{3} = a_2/b_2$ dır. Bu böyle sonsuza dek sürebilir. Öte yandan süremez de! Bir çelişki elde ettik. Demek ki $\sqrt{3}$ kesirli sayı değilmiş[4].

---

[3] Bu örnek yöntemi açıklaması açısından iyi bir örnekse de, yöntemin gücünü ne yazık ki tam gösteremiyor. Fermat bu yöntemle çok daha derin sonuçlar elde etmiştir. *Fermat Ne Biliyordu?* (2) başlıklı yazıda, Fernat'nın kanıtlarından birini vereceğiz ve yöntemin gücü daha iyi anlaşılacak.

[4] Aslında sonsuz iniş yöntemini ilk Eski Yunanlılar bulmuşlardır. Nitekim verdiğim kanıt Eski Yunanlılara aittir. Ama sanırım Eski Yunanlılar bu yöntemi kullanarak bir tek bu teoremi ve çeşitlemelerini kanıtlamışlardır. Yöntemi

Okur, alıştırma olarak, önereceğim şu kanıtı denesin: a ve b sayıları için, $\sqrt{3} = a/b$ eşitliğini varsayalım. O zaman $\sqrt{3} = \frac{3b-a}{a-b}$ eşitliği geçerlidir ve $0 < 3b - a < a$ dir. Sonsuz inişle çelişki elde edilir.

Bir Çeşitleme. Tümevarımla kanıtın bir çeşitlemesi de şöyledir. Kanıtlamak istediğimiz önerme önce 1 için kanıtlanır. Arkasından önermenin n'den küçük sayılar için doğru olduğu varsayılıp, önerme n için kanıtlanır. Bir sonraki yazıda bu tür tümevarımsal kanıta bir örnek vereceğiz.

ilk kez sistematik olarak uygulayan Fermat'dır. Fermat, sayılar kuramıyla ilgili teoremlerinin çoğunu ya sonsuz çıkışla ya da sonsuz inişle kanıtlamıştır, daha doğrusu kanıtladığını öne sürmüştür, çünkü Fermat teoremlerinin kanıtını pek yazmazdı.