Sihirli Kareler (II)

Ali Nesin

Bir önceki yazıda *n* bir tek tamsayı olduğunda *n* × *n* sihirli karelerin nasıl yapılacağını öğrenmiştik. Bu yazıda *n*'nin çift olduğu *n* × *n* boyutlu sihirli kareleri ele alacağız.

Her zaman yaptığımız gibi örneklerle başlayalım. Önce geçen yazıda da verdiğimiz ve sanata da yansıyan[1] ünlü 4 × 4 sihirli kareyi gösterelim:

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Şimdi de 6 × 6'lık sihirli kare:

1	34	33	32	9	2
30	11	25	24	14	7
29	22	16	17	19	8
10	18	20	21	15	27
6	23	13	12	26	31
35	3	4	5	28	36

Son olarak, bu yazıda örnek olarak alacağımız 8 × 8'lik sihirli kare:

64	63	3	4	5	6	58	57
56	55	11	12	13	14	50	49
17	18	46	45	44	43	23	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	30	29	28	27	39	40
41	42	22	21	20	19	47	48
16	15	51	52	53	54	10	9
8	7	59	60	61	62	2	1

2 × 2'lik sihirli kare yok. Deneyin, neden olmadığını hemen anlarsınız: 1 sayısını bir yere koymalıyız. Orası kesin. 2'yi de bir yere koymalıyız. Ama 2 sayısını nereye koyarsak koyalım, 1'le ya aynı sıraya ya aynı kolona ya da aynı çapraza gelecek ve sihirli toplam 1 + 2 = 3 olacak. Dolayısıyla 4'ü koyamayacağız!

1 Dürer'in Melancholia'sına.

Cornelius Agrippa (1486–1534) adlı bir şaklabana göre 1 × 1'lik sihirli kare yani sonsuzluğu ve birimi (aynı anda!) simgeliyormuş. 2×2'lik sihirli karenin olmaması ise, sıkı durun, dört temel öğenin – yani hava, toprak, ateş ve suyun – yetersizliğinin kanıtıymış. Neye yetersiz olduğunu Cornelius'un $\boxed{1}$ bizzat kendisine sorun. Cornelius büyücüymüş. Büyücülük suçundan Brüksel'de bir yıl hapis yatmış. Üst ranzaya kafasını çarptıktan sonra olabilir, 3×3, 4×4, 5×5, 6×6, 7×7, 8×8 ve 9×9'luk sihirli karelerin, sırasıyla, Satürn'ü, Jüpiter'i, Mars'ı, Güneş'i, Venüs'ü, Merkür'ü ve Ay'ı simgelediklerini bulmuş. Nedense öbür sihirli karelerin anlamlarını bulamamış. Bugün hâlâ daha bilinmiyor.

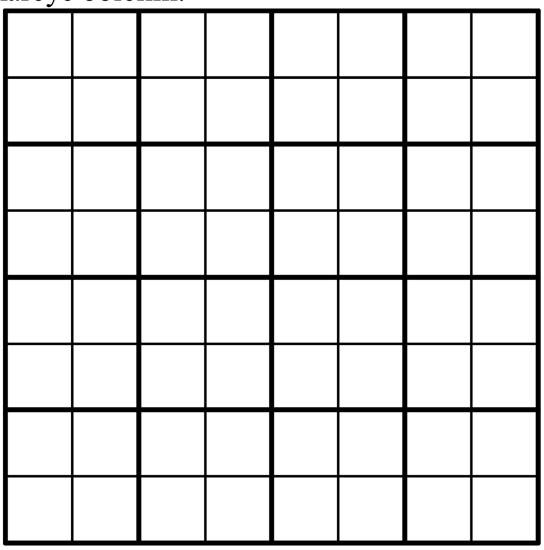
Bir başka Ortaçağ "bilim adamına" göre 2×2'lik sihirli karelerin olmamasının nedeni çok daha basitmiş. Öyle bin dereden su getirmeye gerek yokmuş. Bütün suç Adem'le Havva'daymış. Adem'le Havva yüzünden 2×2'lik sihirli kare yokmuş. Adem'le Havva ilk günahı işlemeselermiş, 2×2'lik sihirli kare bal gibi de olabilirmiş.

Düşünüyorum da, Adem'le Havva ilk günahı işlemeselermiş matematik çelişkili olacakmış ve tatsız tuzsuz bir yaşam sürmeye mahkum olacakmışız.

İnsanların sihirli karelerin tılsımına kendilerini kaptırmaları nedensiz değildir. Sihirli karelerin gerçekten sihirli bir yanı vardır. Sanki sayıların biz insanlardan bağımsız bir yaşamı varmış gibi bir duygu verir. Doğrusu da budur: sayılar biz insanlardan bağımsızdır. Sayıları icat etmemiş, keşfetmişizdir, Amerika'yı keşfettiğimiz gibi...

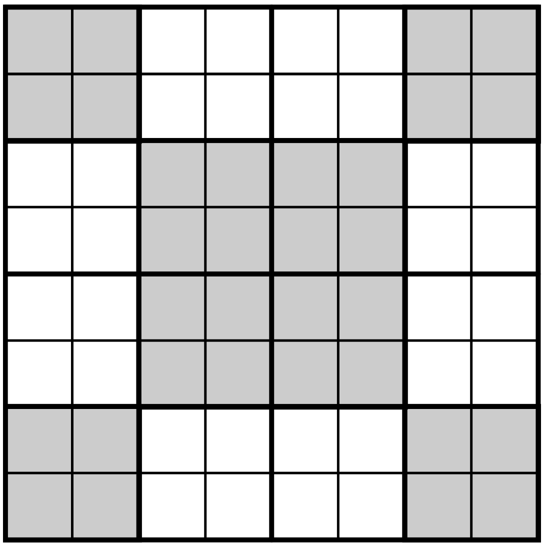
Çift kenarlı sihirli kare yapmaya çalışacağız. Hemen daha başlangıçtan söyleyeyim: çift boyutlu sihirli kareleri yapmak için genel bir yöntem yok, daha doğrusu bugüne dek bulunamamış. Öte yandan 4, 8, 12, 16 gibi dörde bölünebilen kenarlı sihirli kare yapılabiliyor. Önce bu sihirli kareleri bulalım. Bugüne dek daha nasıl yapılacağı tam olarak bilinmeyen 6, 10, 14, 18... kenarlı sihirli kareleri yazının sonuna bırakalım.

n, dörde bölünebilen bir sayı olsun. n'yi dörde bölelim ve $n = 4m$ yazalım. Müstakbel sihirli karemizi 16 tane $m \times m$'lik küçük kareye bölelim. Örneğin $n = 8$ ise (yani $m = 2$ ise), karemizi 16 tane 2 × 2'lik kareye bölelim:



Eğer $n = 12$ olsaydı, karemizi 16 tane 3 × 3 boyutlu küçük kareye bölecektik.

Şimdi her iki çaprazı da içeren $m \times m$'lik karelere bakalım. m kaç olursa olsun, bu karelerden 8 tane vardır. Yani 16 adet $m \times m$'lik küçük karenin yarısı çaprazları içerir, öteki yarısı içermez. Bu kareleri kurşun kalemle boyayalım. $n = 8$ olduğunda durum şöyle:



Şimdi her kareye bir sayı koyacağız. En üst sol köşeden ve 1'den başlayarak kareleri sırayla numaralayalım. Ancak karalanmamış kareleri atlayalım. Karalanmamış kareleri daha sonra numaralayacağız. $n = 8$ için elde ettiğimiz durumu gösterelim:

		3	**4**	**5**	**6**		
		11	**12**	**13**	**14**		
17	**18**					**23**	**24**
25	**26**					**31**	**32**
33	**34**					**39**	**40**
41	**42**					**47**	**48**
		51	**52**	**53**	**54**		
		59	**60**	**61**	**62**		

Şimdi sıra karalanmış karelerde. Gri kareleri numaralamak için aynı şeyi yapacağız ama bu kez alt sağ köşeden başlayacağız ve beyaz kareleri atlayacağız. $n = 8$ iken gri karelerin numaraları şöyle olacak:

64	**63**					**58**	**57**
56	**55**					**50**	**49**
		46	**45**	**44**	**43**		
		38	**37**	**36**	**35**		
		30	**29**	**28**	**27**		
		22	**21**	**20**	**19**		
16	**15**					**10**	**9**
8	**7**					**2**	**1**

Yukardaki son iki şekli üstüste koyacak olursakon page 1. sayfada verdiğimiz 8 × 8'lik sihirli kareyi elde ederiz.

Bu yöntemle 4*m* × 4*m*'lik her sihirli kareyi bulabiliriz.

12 × 12'lik sihirli kareyi de bulabiliriz. İşte bütün ihtişamıyla o sihirli kare:

				40	41	42	43		0	1	2
3	4	5	6	28	27	26	25	1	2	3	4
5	6	7	8	16	15	14	13	3	4	5	6
7	8	9	0	04	03	02	01	5	6	7	8
6	5	4	3	3	4	5	6	8	7	6	5
4	3	2	1	5	6	7	8	6	5	4	3
2	1	0	9	7	8	9	0	4	3	2	1
0	9	8	7	9	0	1	2	2	1	0	9
7	8	9	00	4	3	2	1	05	06	07	08
09	10	11	12	2	1	0	9	17	18	19	20
21	22	23	24	0	9	8	7	29	30	31	32
33	34	35	36					41	42	43	44

Şimdi sıra dörde bölünemeyen çift boyutlu sihirli kare yapmaya geldi. Bunun bilinen bir yöntemi yok. Sihirli karenin yapılmasına yardımcı bir yöntem biliniyor ancak.

Önce 6 × 6'lık sihirli kare yapmaya çalışalım.

Bir önceki yazımızda *n* × *n*'lik bir sihirli karenin sihirli sayısının, yani ya bir sıranın ya bir kolonun ya da bir çaprazın sayılarının toplamının $n(n^2+1)/2$ olduğunu görmüştük. Bu formülde $n = 6$ alırsak 111 buluruz. Demek ki 6 × 6'lık bir sihirli karenin sihirli sayısı 111.

Bu sayıyı aklımızın bir köşesine yazalım.

	16	2	3	13	
	5	11	10	8	
	9	7	6	12	
	4	14	15	1	

4 × 4'lük bir sihirli kareyi, yandaki gibi, 6 × 6'lık bir karenin tam ortasına oturtalım:

Şu anda sihirli sayımız 34 (ister toplayın ister yukardaki formülü $n = 4$'e uygulayın.) 111'e daha çok var. Elde etmek istediğimiz 111 sayısına yaklaşmak için yukardaki karenin sayılarına 10 ekleyin:

Sihirli sayımız 74 oldu (eskiden 34'tü, 40 daha ekledik.) Her ne kadar 111'e yaklaştıysak da daha 37 sayılık eksiğimiz var. (74'ün 111 olması için 37 gerek.) Ancak daha tüm sayıları kullanmadık. Şimdi sayısı olmayan karelere dahaca kullanmadığımız sayıları yazacağız. Kullanmadığımız sayıları önce sıralayalım:

	26	12	13	23	
	15	21	20	18	
	19	17	16	22	
	14	24	25	11	

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
36	**35**	**34**	**33**	**32**	**31**	**30**	**29**	**28**	**27**

Sayısız karelerimize bu sayılardan yerleştireceğiz. Sıralamaya dikkat edin. İkinci sıra tersten yazılmış ve altalta gelen sayıların toplamı 37. Demek ki üst sıradaki küçük sayının yeri alt sıradaki büyük sayının yerini belirleyecek.

Her kenarda 6 kare var. Bu 6 karenin yarısına üst sıradaki küçük sayılardan, geri kalan yarısına da alt kattaki büyük sayılardan koyacağız.

Önce çaprazların işini bitirelim. Üst iki köşe kareye dahaca kullanmadığımız en küçük iki sayıyı, 1 ve 2 sayılarını koyalım. Alt iki köşeye gelecek sayılar şimdi belli: 35 ve 36:

1					2
	26	12	13	23	
	15	21	20	18	
	19	17	16	22	
	14	24	25	11	
35					36
1	34	33	32	9	2
30	11	25	24	14	7
29	22	16	17	19	8
10	18	20	21	15	27
6	23	13	12	26	31
35	3	4	5	28	36

Böylece çaprazların toplamı 111 oldu. Bundan sonrası için bir kural olduğunu sanmıyorum. Çeşitli olasılıkları denemek gerekiyor. Ancak iki noktaya dikkat edelim: a) Her dört kenara üç büyük, üç küçük sayı koyacağız ve b) Karşılıklı sayıların toplamı 37 olacak. Elbet sihirli sayıyı da unutmayalım.

Alt sıraya daha hiç küçük sayı koymadık. Oysa üç küçük sayı koymamız gerekiyor. 3, 4 ve 5'i deneyelim. Bakalım olacak mı? Bu sayıların tepelerine 34, 33 ve 32 gelmek zorunda. Gelsinler. Sihirli karenin tamamlanmasına az kaldı. Sihirli sayı 111 olduğundan, alt ve üst kenarlara gelecek son sayılar da belli. Geriye sağ ve sol kenarlara gelecek sekiz sayıyı bulmak kalıyor. El yordamıyla bulunabiliyor bu sayılar. Ve işte 6 × 6'lık sihirli kare solumuzda.

10 ×10'luk sihirli kare yapmak için,

1) 8 × 8'lik sihirli kareyi 10 × 10'luk karenin tam ortasına, göbeğine koyun.

2) Ortadaki 8 × 8'lik karenin her sayısına 18 ekleyin.

3) Dahaca koymadığınız

0 1 2 3 4 5 6 7 8

00 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 9 8 7 6 5 4 3

sayılarını yukardaki biçimde bir kenara yazın.

4) Şimdi bu sayıları boş kalan kenar karelere yerleştireceğiz. İlk olarak üst iki köşeye 1 ve 2 sayılarını, alt iki köşeye 100 ve 99 sayılarını yerleştirin.

5) Bundan sonrası için bilinen üç yardımcı kural var. Bu noktalardan yararlanarak 10 × 10'luk sihirli kareyi tamamlamaya çalışın:

5a) Her kenara 5 büyük, 5 küçük sayı yazılacak.

5b) Karşılıklı kenara toplamı 101 olan sayılar gelecek.

5c) Sihirli sayımız 505.

İşte bu yolla yapılmış 10 × 10'luk sihirli kare:

1	98	97	96	95	90	10	9	7	2
8	19	21	80	79	78	77	25	26	93
14	27	28	72	71	70	69	33	34	87
17	66	65	37	38	39	40	60	59	84
18	58	57	45	46	47	48	52	51	83
85	50	49	53	54	55	56	44	43	16
86	42	41	61	62	63	64	36	35	15
88	67	68	32	31	30	29	73	74	13
89	75	76	24	23	22	21	81	82	12
99	3	4	5	6	11	91	92	94	100

Genel yöntem aşağı yukarı belli olmuştur sanırım. $n = 4m + 2$, dörde bölünemeyen bir çift sayıysa, $n \times n$ boyutlu bir sihirli kare yapmak için:

1) $n \times n$ boyutlu karenin tam ortasına $4m \times 4m$'lik bir sihirli kare yerleştirin.

2) Bu sihirli karenin her sayısına $2n - 2$ ekleyin.

3) Dahaca kullanmadığınız sayıları iki sıra olarak yazın. Üste küçük sayıları küçükten büyüğe, alta büyük sayıları büyükten küçüğe koyun. Böylece üstüste gelen sayıların toplamı $n^2 + 1$ olacaktır. Bu sayıları kenardaki boş karelere yerleştireceksiniz.

4) İlk olarak 1 ve 2 sayılarını üst kenar köşelerine yerleştirin. Alt köşelere $n^2 - 1$ ve n^2 sayıları gelecek.

5) Bundan sonrası için genel kural yok. El yordamıyla bulacaksınız. Aşağıdaki üç kurala uymaya çalışın:

5a) Her kenara $2m + 1$ tane büyük, $2m + 1$ tane de küçük sayı gelecek.

5b) Karşılıklı sayıların toplamı $n^2 + 1$ olacak.

5c) Sihirli sayı $n(n^2 + 1)/2$ olacak.