# Sihirli Kareler (I)

**Ali Nesin**

Çocuk dergilerinin şaşmaz sorusudur: “Aşağıdaki karenin içine 1’den 9’a kadar sayıları öyle yerleştirin ki, her sıranın, her kolonun ve her iki çaprazın sayılarının toplamı 15 olsun”. Bu soruyu sağ tarafta çözelim:

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

Bu tür karelere sihirli kare adı verilir. 4 × 4’lük sihirli kareyi yanda solda bulacaksınız.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 14 | 4 |
| 12 | 6 | 7 | 9 |
| 8 | 10 | 11 | 5 |
| 13 | 3 | 2 | 16 |

4 × 4’lük sihirli karede sihirli toplam 34’tür. Yani her yatay, dikey ve çapraz sıradaki sayıların toplamı 34’ tür.

Birazdan yakından inceleyeceğimiz 5 × 5’lik sihirli kareyle 7 × 7’lik sihirli kareler tüm güzellikleriyle aşağıdalar:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 39 | 48 | 1 | 10 | 19 | 28 |
| 38 | 47 | 7 | 9 | 18 | 27 | 29 |
| 46 | 6 | 8 | 17 | 26 | 35 | 37 |
| 5 | 14 | 16 | 25 | 34 | 36 | 45 |
| 13 | 15 | 24 | 33 | 42 | 44 | 4 |
| 21 | 23 | 32 | 41 | 43 | 3 | 12 |
| 22 | 31 | 40 | 49 | 2 | 11 | 20 |

Bu ve bundan sonraki yazıda sihirli kare yapmasını öğreneceğiz.

Sihirli karelerin bir işe yarayıp yaramadıklarını bilmiyorum. Doğrusu bir matematikçi olarak beni pek de ilgilendirmiyor. Umarım insanların daha mutlu olmalarını sağlar günün birinde. Sihirli kareler işe yarasın ya da yaramasın, sihirli kareler üzerine yanıtlanmamış soru varoldukça sihirli kareler ilginç bir konu olmayı sürdüreceklerdir.

*n* bir doğal sayı olsun. $n \times n$’lik bir karenin içine 1’den $n^2$’ye kadar olan bütün tamsayıları yerleştireceğiz. Her sayı yalnızca bir karede kullanılmak üzere elbet... Ve bunu öyle yapacağız ki, her sıranın, her kolonun ve her iki çaprazın da toplamları aynı olacak. Bu toplama **sihirli toplam** denir. Önce sihirli toplamı bulalım. $n \times n$’lik bir sihirli kareye yazılan bütün sayıların toplamı 1’den $n^2$’ye kadar tamsayıların toplamıdır, ve bu toplam $n^2(n^2+1)/2$ sayısına eşittir (bknz. sayfa 150.**Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.**) Öte yandan *n* tane sıra var ve her sıranın toplamı birbirine eşit. Demek ki sihirli toplamı bulmak için yukardaki sayıyı *n*’ye bölmeliyiz. Dolayısıyla sihirli toplam $n(n^2+1)/2$ sayısına eşittir. Örneğin, verdiğimiz ilk sihirli karede $n = 3$ olduğundan, sihirli sayı $3(3^2+1)/2 = 15$’tir. Eğer $n = 4$ ise toplam 34, $n = 5$ ise toplam 65 olmalıdır.

Şimdi *n*’nin tek sayı olduğunu varsayalım ve $n \times n$’lik bir sihirli kare bulalım. Çift sayı boyutlu sihirli kareleri bir sonraki yazıda göreceğiz.

Dört tane kural var. Bu dört kuralı uygulayarak $n$ tek olduğunda tüm $n \times n$ boyutlu sihirli kareleri bulabilirsiniz.

**Birinci Kural:** 1'i en üst sıranın ortasına koyun. Eğer $n = 5$ ise, birinci kuraldan sonra müstakbel sihirli kareniz sağdaki gibi olmalı:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

**İkinci Kural:** Yer varsa, her koyduğumuz sayının sağ üst çaprazına bir sonraki sayıyı koyacağız. Örnek olarak 5 × 5'lik sihirli karede (2,3), (4,5), (6,7,8), (11,12,13,14,15), (18,19,20), (21,22), (23,24) sayılarına bakın.

**Üçüncü Kural:** Kimileyin ikinci kuralı uygulamak istediğimizde karenin dışına çıkmak zorunda kalırız. Örneğin, yukardaki durumda 2'yi 1'in sağ üst köşesine koyamayız, çünkü öyle bir kare yok. Eğer üst kenardan karenin dışına çıkmışsak, çıktığımız kolonun en altına geçelim. Eğer sağ kenardan karenin dışına çıkmışsak, çıktığımız sıranın en soluna gidelim. Bu kurala göre, yukardaki durumda 2 en alt sıranın soldan dördüncü karesine yazılmalı.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | 2 | |

3'ü ikinci kurala uyarak yerleştirebiliriz:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | 3 |
| | | | 2 | |

Şimdi 4'ü koymamız gerekiyor. Ancak 4 sayısı karenin dışına çıkıyor. Sağdan çıkıyor. Üçüncü kurala göre çıktığı sıranın en soluna gitmemiz gerekiyor:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| | | | | |
| 4 | | | | |
| | | | | 3 |
| | | | 2 | |

5'i ikinci kurala uyarak yerleştirebiliriz:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| | 5 | | | |
| 4 | | | | |
| | | | | 3 |
| | | | 2 | |

6'yı ilk üç kurala göre koyamıyoruz. çünkü 6'nın sağ üst köşesindeki karede bir başka sayı var ve yukardaki kurallar bu durumda ne yapılması gerektiğini söylemiyor.

**Dördüncü Kural:** Eğer koyacağımız sayının yerinde daha önce koyduğumuz bir sayı varsa, koymamız gereken sayıyı bir önceki sayının altına yazalım.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| | 5 | | | |
| 4 | 6 | | | |
| | | | | 3 |
| | | | 2 | |

Bu kurala göre 6, 5'in altına gelecek.

İkinci kurala göre 7 ve 8'in nereye konması gerektiğini biliyoruz:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 8 | |
| | 5 | 7 | | |
| 4 | 6 | | | |
| | | | | 3 |
| | | | 2 | |

9 karenin dışına çıkıyor. Üçüncü kuralı uygulayalım:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 8 | |
| | 5 | 7 | | |
| 4 | 6 | | | |
| | | | | 3 |
| | | | 2 | 9 |

10 da dışarıda kalıyor. Gene üçüncü kuralı uygularız:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 8 | |
| | 5 | 7 | | |
| 4 | 6 | | | |
| 10 | | | | 3 |
| | | | 2 | 9 |

11 koymamız gereken yerde 6 var. Demek ki dördüncü kuralı uygulamamız gerekiyor:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 8 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 5 | 7 | | |
| 4 | 6 | | | |
| 10 | | | | 3 |
| 11 | | | 2 | 9 |

12, 13, 14, 15'in yerleri boş. İkinci kuralı uygulayalım:

16 dışarda kalıyor. Hem de en köşede... Ne yapmalıyız? Aslında 16'nın yerinde 11 var. Neden? Şu nedenden: Üçüncü kuralı bir kez daha dikkatlice okuyalım. Üçüncü kurala göre karenin üst kenarıyla alt kenarını ve sağ kenarıyla sol kenarını yapıştırıyoruz. O zaman karenin sağ üst kenarıyla sol alt kenarı üstüste biniyor. Yani dışarı çıkan 16 aslında pek dışarı çıkmıyor, daha doğrusu dışarı çıktığı yerde 11 var. Demek ki dördüncü kuralı uygulayacağız:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 8 | 15 |
| | 5 | 7 | 14 | |
| 4 | 6 | 13 | | |
| 10 | 12 | | | 3 |
| 11 | | | 2 | 9 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 8 | 15 |
| | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | | |
| 10 | 12 | | | 3 |
| 11 | | | 2 | 9 |

17 sağdan taca çıktı. Taç atışını soldan kullanalım:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | | 1 | 8 | 15 |
| | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | | |
| 10 | 12 | | | 3 |
| 11 | | | 2 | 9 |

18 avut! 18'i koymak için üçüncü kuralı uygulayalım:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | | 1 | 8 | 15 |
| | 5 | 7 | 14 | 16 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 6 | 13 | | |
| 10 | 12 | | | 3 |
| 11 | 18 | | 2 | 9 |

19 ve 20’yi koymak kolay, ikinci kuralı uygulamak yeterli:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | | 1 | 8 | 15 |
| | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | |
| 10 | 12 | 19 | | 3 |
| 11 | 18 | | 2 | 9 |

21 için dördüncü kuralı uygularız:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | | 1 | 8 | 15 |
| | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | | 2 | 9 |

22 ikinci kurala uyuyor:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | | 1 | 8 | 15 |
| | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | | 2 | 9 |

23 sağdan dışarı çıkıyor. Üçüncü kural bu gibi durumlar için yaratılmış:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | | 1 | 8 | 15 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 1 | 2 | 2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 0 | 2 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | | 2 | 9 |

24 için ikinci kuralı uyguluyabiliriz:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | | 2 | 9 |

25 için bir tek yer kaldı. Üçüncü kuralı uygularsak 25 tam yerine oturur:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 |

İşte 5 × 5'lik sihirli karenin öyküsü. Artık dilerseniz 1985 × 1985'lik sihirli kare bile yapabilirsiniz. Ama bence dilemeyin.

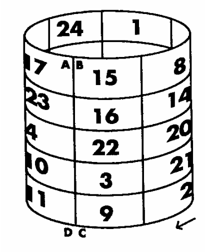
Üçüncü kurala bir kez daha göz atalım. Bu kurala göre yukarı çıkan kare aşağıya iniyor. Yani sihirli karenin üst sınır çizgisini alt sınır çizgisiyle eşleştiriyoruz. Aynı şeyi sol ve sağ sınır çizgileri için de söyleyebiliriz. Sihirli karenin dört köşesine ad koyalım:

*A* *B*

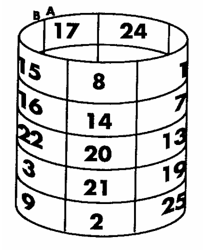
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 |

*C* *D*

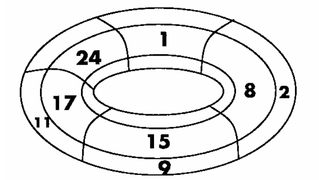
Önce sağ ve sol kenarları, yani *AD* kenarıyla *BC* kenarını eşleştirip bir silindir elde edelim:




Bu silindiri biraz döndürelim ki arkadaki sayılar da görünsün:




Böylece (2,3,4,5), (6,7,8), (9,10), (11,12,13,14,15), (16,17), (18,19,20) ve (21,22,23,24) sayıları birbirinin çaprazına geldiler. Son olarak *AB* ve *CD* kenarlarını, yani silindirin alt ve üst tabanlarını eşleştirelim:




Bu “tekerlekte” (1,2,3,4,5), (6,7,8,9,10), (11,12,13,14,15), (16,17,18,19,20) ve (21,22,23,24,25) sayıları birbirinin çaprazına geldiler. Matematikte “tekerlekler” çok önemlidir ve tekerleklerin özel bir adı vardır: **Torus**.