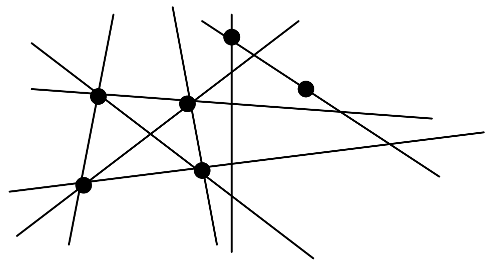
Seçme Beliti

Ali Nesin

Aşağıda yedi matematiksel olgu bulacaksınız. Bu olguların herbiri bir teoremdir, kanıtlanmışlardır. Ancak bu olgular, matematikte çok özel bir yeri olan Seçme Beliti kullanılarak kanıtlanmıştır. Seçme Beliti'nden yazının sonunda sözedeceğim.

Birinci Soru: Bildiğimiz $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ Öklid düzleminin öyle bir altkümesini bulun ki, düzlemin her doğrusunun üstünde bu altkümeden tam iki nokta olsun (ne fazla ne eksik…)

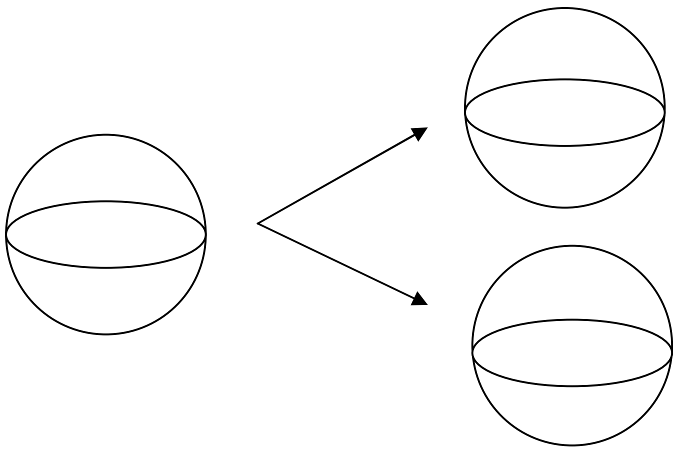


Yani, öyle bir $X \subseteq \mathbf{R}^2$ bulacaksınız ki, eğer $\ell \subseteq \mathbf{R}^2$ bir doğruysa, $\ell \cap X$ kümesinde tam iki nokta olacak.

Arayın. Çok arayın. İstediğiniz kadar arayın. Eğer matematikçi değilseniz, bazı özel bilgilere sahip değilseniz bulamayacaksınız.

İkinci Soru. Bu soruyu okuduğunuzda, soruyu doğru anlamadığınızı sanacağınıza dair iddiaya girebilirim.

Yarıçapı 1 olan bir küre alın. Bu kürenin yüzeyini, öyle sonlu sayıda parçaya ayırın ki, o sonlu parçaları gene yarıçapı 1 olan iki küre elde edecek biçimde birleştirin… Hem de parçaları eğip bükmeden, çekip çekiştirmeden… Sadece parçaları havada döndürerek ve öteleyerek...



Matematikte buna **Banach-Tarski paradoksu** adı verilir.

Üçüncü Soru:

a) 0, 1, 2, 3, gibi sayılara doğal sayı denir. Boş olmayan her doğal sayı kümesinden bir eleman (eşantiyon) seçebiliriz; örneğin kümenin en küçük elemanını eşantiyon olarak seçebiliriz... Sözgelimi, bu yöntemle, $\{1, 5, 8\}$ kümesinden 1'i, çift sayılar kümesinden 0'ı, asal sayılar kümesinden 2'yi seçeriz.

b) $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ gibi sayılara tamsayı denir. Boş olmayan her tamsayı kümesinden de belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz. Örneğin şu yöntemi deneyelim: Tamsayı kümemize X diyelim; eğer X'in en büyük elemanı varsa o en büyük elemanı, yoksa $X \cap \mathbf{N}$ kümesinin en küçük elemanını seçelim. (Burada $\mathbf{N}$, doğal sayılar kümesini simgeliyor.) Böylece her tamsayı kümesinden bir eleman seçmiş olduk.

c) 2/3, –3/4, 6/2 (yani 3), 0/7 (yani 0) gibi sayılara **kesirli sayılar** denir. Kesirli sayılar kümesi $\mathbf{Q}$ simgesiyle gösterilir:

$$\mathbf{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbf{Z} \text{ ve } b \neq 0\}.$$

Pozitif kesirli sayılar kümesi $\mathbf{Q}^{\geq 0}$ olarak gösterilir:

$$\mathbf{Q}^{\geq 0} = \{a/b : a, b \in \mathbf{N}, b \neq 0\}.$$

Boş olmayan bir pozitif sayılar kümesinden bir sayı nasıl seçeriz? Kümeye X diyelim. Şu kümeyi tanımlayalım:

$$A(X) = \{a + b : a/b \in X\}$$

$A(X)$ boş olmayan bir doğal sayı kümesi olduğundan en küçük elemanı vardır. Bu elemana n diyelim. Şimdi,

$$\{a/b \in X : a + b = n\}$$

kümesine bakalım. Bu, sonlu bir kesirli sayılar kümesidir, dolayısıyla bir en küçük elemanı vardır. İşte X'in bu elemanını seçelim. X'ten bu yöntemle seçtiğimiz elemana $f(X)$ adını verelim.

Örneğin,

$$X = \{a^2/b : a \text{ asal ve } a^2 + b^2 \text{ sayısı 4'e ve 5'e bölünmez}\}$$

ise,

$$A(X) = \{a + b : a \text{ asal ve } a^2 + b^2 \text{ sayısı 4'e ve 5'e bölünmez}\} = \{5, 6, ...\}$$

kümesidir. $A(X)$ kümesinin en küçük elemanı 5'tir ($a = 3$, $b = 2$ ya da $a = 2$, $b = 3$.) Dolayısıyla yukarda açıkladığımız yöntemle X'ten 2/3'ü seçeriz, yani $f(X) = 2/3$'tür.

d) Boş olmayan kesirli sayı kümelerinden de birer eleman seçebiliriz. $X \subseteq \mathbf{Q}$ boş olmayan bir küme olsun. Eğer $X \cap \mathbf{Q}^{\geq 0}$ boş değilse, yukardaki yöntemi kullanalım ve $f(X \cap \mathbf{Q}^{\geq 0})$ elemanını seçelim. Eğer $X \cap \mathbf{Q}^{\geq 0}$ boşkümeyse, $(-X) \cap \mathbf{Q}^{\geq 0}$ kümesi boş değildir, o zaman da X'yen $-f((-X) \cap \mathbf{Q}^{\geq 0})$ elemanını seçelim.

e) Reel sayılar kümesinin

$$[a, b], [a, b), (a, b], (a, b), (-\infty, a], (-\infty, a), [a, \infty), (a, \infty), (-\infty, -\infty)$$

gibi altkümelerine **aralık** adı verilir. Reel sayıların boş olmayan aralıklarından da belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz. $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) aralıklarından "orta noktayı", yani $(a + b)/2$ noktasını, $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$ aralıklarından $a - 1$ noktasını, $[a, \infty)$, (a, ∞) aralıklarından $a + 1$ noktasını ve $(-\infty, -\infty)$ aralığından (gene orta noktayı!) 0 noktasını seçelim.

f) Yapamayacağınızı iddia ettiğim asıl sorum şu: Boş olmayan reel sayı kümelerinin herbirinden, belli bir yöntemle bir sayı seçebilir misiniz?

Dördüncü Soru: Reel sayılar kümesinin öyle bir X altkümesini bulun ki, her r reel sayısı belli bir $x_1, \ldots, x_n \in X$ ve $q_1, \ldots, q_n \in \mathbf{Q}$ için, $q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n$ olarak yazılsın ve r'nin bu tür bir başka yazılımı (sıralama farkı dışında) olmasın.

Beşinci Soru: $\mathbf{Q}$'nün aşağıdaki iki özelliği sağlayan A altkümelerine bakalım:

1) Eğer x ve y kesirli sayıları A'daysalar, $x - y$ sayısı da A'dadır.
2) $1 \notin A$.
Böyle bir küme var mıdır? Evet! Örneğin çift tamsayılar kümesi, yani $2\mathbf{Z}$. Çift tamsayıların farkı gene bir çift sayıdır ve 1 çift sayı değildir.
Peki, **Q** kümesinin bu tür altkümelerinin en büyüğünü bulabilir miyiz?
Yanıt gene evet!

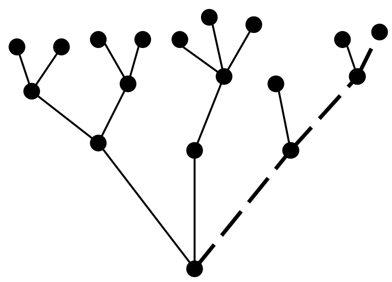
$$A = \{2a/b : a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z} \text{ ve } b \text{ bir tek tamsayı}\},$$

yani payı çift olan kesirli sayıların kümesi işte böyle bir kümedir (kanıtı kolay) ve bu tür kümelerin en büyüğüdür (kanıtı biraz daha zor.)
Bunlar yapılabilir. Şimdi reel sayılar kümesine geçelim. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir A bulmaya çalışın:

1) $A \subseteq \mathbf{R}$.
2) A çıkarma altında kapalı.
3) $1 \notin A$.
4) A, yukardaki özellikleri taşıyan kümelerin en büyüğü olsun. Yani B kümesi yukardaki üç özelliği sağlıyorsa ve $A \subseteq B$ ise, $A = B$ olsun.

Deneyin, eğer Seçme Beliti'ni bilmiyorsanız, yukardaki dört özelliği sağlayan bir A kümesi bulamayacaksınız.

Altıncı Soru: Bir ağaç nedir? Sorum bu değil. Bu sorunun cevabını vereceğim. Bir ağaç şöyle bir şeydir:



Kara noktalara **budak** diyelim. Her budaktan çıkan dallara da **dal** diyelim… Birbirinin peşisıra gelen dal dizilerine de **yol** diyelim. Örneğin yukarda kesik çizilmiş üç dal bir yol oluşturur.
Şu teoremi kanıtlamaya çalışın:
Eğer bir ağacın her budağından sonlu sayıda dal çıkıyorsa, ama ağaçta sonsuz sayıda dal varsa, o zaman, ağaçta sonsuz sayıda dalın (ya da budağın) olduğu bir yol vardır.
Bu teorem matematikte **König Önsavı** olarak bilinir.

Yedinci soru. Eğer sonsuz bir küme $\{a_0, a_1, a_2, a_3,\ldots\}$ biçiminde doğal sayılarla sayılandırılıyorsa, bu kümeye **sayılabilir sonsuzlukta** küme diyelim. Örneğin, doğal sayılar sayılabilir sonsuzluktadır. Çift sayılar da sayılabilir sonsuzluktadır. Asal sayılar kümesi de. Asal sayılar kümesini şöyle sayılandırabiliriz:

$a_0 = 2$
$a_1 = 3$
$a_2 = 5$
$a_3 = 7$

$a_4 = 11$

$a_n = (n+1)$inci asal

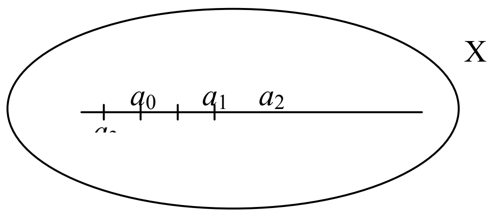
Genel olarak, doğal sayılar kümesinin her sonsuz altkümesi sayılabilir sonsuzluktadır.

Z kümesi de sayılabilir sonsuzluktadır:

$$\begin{array}{lcr} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 1 \\ a_2 & = & -1 \\ a_3 & = & 2 \\ a_4 & = & -2 \\ a_5 & = & 3 \\ a_6 & = & -3 \\ a_7 & = & 4 \\ & \ldots & \\ a_{2n} & = & -n \\ a_{2n+1} & = & n+1 \end{array}$$

Kesir sayılar kümesi **Q** de sayılabilir sonsuzluktadır. ppppppp

Öte yandan reel sayılar kümesi **R** sayılabilir sonsuzlukta değildir. Değildir ama sayılabilir sonsuzlukta bir altküme içerir: doğal sayılar kümesi **N**.



Her sonsuz kümenin, sayılabilir sonsuzlukta bir altkümesi olması gerekmez mi? Evet diyorsanız haklısınız, olması gerekir. Kanıtlayın o zaman! Eğer seçme belitini bilmiyorsanız başaramayacaksınız.

Seçme belitini bilmeyen okurun bu olguları kanıtlayamayacağını söylemiştim. Bu, bir kanı ya da yargı değildir, bir kesinliktir. Seçme beliti kullanılmadan bu olguların kanıtlanamayacağı kanıtlanmıştır.

Seçme beliti nedir? Anlatmaya çalışayım.

Çok bilinen bir örnekle başlayayım. Önünüzde sonsuz tane ayakkabı çifti varsa, her ayakkabı çiftinden birini seçebilirsiniz, örneğin sol ayakkabıyı seçebilirsiniz. Önünüzde sonsuz tane eldiven çifti varsa da, böyle bir seçim yapabilirsiniz. Ama ya önünüzde sonsuz tane çorap çifti varsa? Her çorap çiftinden birini seçmek için bir yöntem bulamazsınız.