Şapkadan Güvercin Çıkarmak

Ali Nesin

Dedemin ahşap evinin tam karşısında, kaldırım taşı büyüklüğünde taşlarla örülmüş, uçsuz bucaksız uzanan, yerden göğe yükselen ve fi tarihinden kalma bir duvar vardı. Öylesine uzun ve yüksek bir duvardı ki, pencereden bakıp duvardan başka bir şey görmek için yaşamı tehlikeye atmak gerekirdi. Neyin duvarıydı, ardında ne vardı, nedense hiç merak etmedim.

Dedemi her ziyaretimde, o sonsuz duvarın oyuklarında barınan güvercinleri seyrederdim pencereden. Hiçbir anlam yükleyemediğim uğultulu bir guguk sesi yükselirdi güvercinlerden. Kanarya şakıması gibi neşe ve cilve dolu değildi bu guguk sesi. Martı ötüşü gibi cıyak cıyak ve arsız da değildi. Hele karga gaklaması gibi ürkünç hiç değildi. Dinsel çağrışımlar uyandıran, Gregoryen şarkılarını anımsatan gizemli bir uğultuydu güvercinlerinkisi.

Duvar sonsuzdu sonsuz olmasına ama galiba duvardaki oyuk sayısı sonluydu. En azından güvercin sayısı oyuk sayısından her zaman daha fazlaydı; öyle ki her oyukta birkaç güvercin birden bulunurdu. Saymasını daha yeni öğrendiğimden olacak, oyukları ve güvercinleri saymaya çalışırdım. Oyuklar sayılmak için uslu uslu beklerlerdi de, güvercinlerle bir türlü başedemezdim. Aklına esen uçar gider, kimi durup dururken yer değiştirir, nerden bilinmez, bir güvercin çıkagelir, ya da iki güvercin barındırdığını sandığım bir oyuktan bir üçüncü, bir dördüncü, hatta kimileyin bir beşinci güvercin çıkıverirdi.

Güvercin sayısı oyuk sayısından her zaman daha fazlaydı dediğim gibi. Yirmi oyuk varsa, barınmak isteyen otuz güvercin vardı. Zorunlu olarak oyuklardan birinde birden fazla güvercin barınırdı.

Eğer güvercin sayısı oyuk sayısından daha fazlaysa, en az bir oyukta birden fazla güvercinin olması gerektiğinin çok yararlı ve önemli bir matematik ilkesi olduğunu yıllar sonra öğrenecektim. Buna, matematikte, **güvercin yuvası ilkesi** denir.

Eğer 10 güvercin yuvası ve 11 güvercin varsa, yuvaların birinde en az iki güvercin barınmalıdır.

Eğer 10 güvercin yuvası ve 21 güvercin varsa, yuvaların birinde en az üç güvercin barınmalıdır.

Eğer 10 güvercin yuvası ve 31 güvercin varsa, yuvaların birinde en az dört güvercin barınmalıdır.

Güvercin yuvası ilkesine göre, 25 kişiye 1'le 24 arasında bir sayı verilecekse, en az iki kişiye aynı sayı düşmeli. Bu akıl yürütme güvercin yuvası ilkesiyle şöyle açıklanabilir: 24 tane yuva olsun ve bu yuvaları 1'den 24'e sayılayalım. 25 kişiyi bu yuvalara sokacağız. 1 sayısı verilenler 1 sayılı yuvaya, 2 sayısı verilenler 2 sayılı yuvaya, 3 sayısı verilenler 3 sayılı yuvaya, ..., 24 sayısı verilenler 24 sayılı yuvaya girecekler. 25 kişi olduğundan ve yalnızca 24 yuva olduğundan, yuvalardan birine en az iki kişi girmeli, yani en az iki kişiye aynı sayı verilmiş olmalı.

Saç Sayısı. Güvercin yuvası ilkesini kullanarak Türkiye'de en az iki kişinin aynı sayıda saçı olduğunu kanıtlayabiliriz. Hem de kimsenin saçını saymadan! Şöyle kanıtlarız: Türkiye'de 55 milyondan fazla insan yaşıyor. Oysa bir insanın sahip olabileceği saç sayısı, o insan ne kerte kıllı olursa olsun, 55 milyondan çok daha az. Demek ki her yurttaşın saç sayısı değişik olamaz ve en az iki kişide aynı sayıda saç olmalı.

Bir insanın sahip olabileceği saç sayısının üstsınırını tam olarak bilmiyorum. Sanırım bir milyondan daha azdır. Eğer sandığım gibi bir insanda en fazla bir milyon saç olabiliyorsa, o zaman Türkiye'de en az 55 kişinin aynı sayıda saçı vardır.

Burda, güvercin yerine insan, yuva yerine de saç sayısını koyduk. Bir milyon yuvamız var. Bu yuvaları 0'dan 999.999'a sayılayalım. 55 milyondan fazla insanı, saç sayılarına göre, bu bir milyon yuvaya sokacağız. Keller, yani sıfır saçı olanlar, 0 sayılı yuvaya girecek. Bir tel saçı olanlar 1 sayılı yuvaya, iki tel saçı olanlar 2 sayılı yuvaya,... ve 999.999 tel saçı olanlar 999.999 sayılı yuvaya... Demek ki en az 55 kişi aynı yuvaya girmek zorunda, yani en az 55 kişide aynı sayıda saç vardır.

Tanış Sayısı. Güvercin yuvası ilkesini kullanarak bir başka teorem kanıtlayalım: *"Herhangi bir insan topluluğunda, aynı sayıda insan tanıyan (en az) iki kişi vardır"* teoremini. Yani herhangi bir toplulukta, tanıdıkları insan sayısı birbirine eşit olan en az iki kişi vardır.

Örneğin dört kişilik ailemde, ailemin her ferdi üç kişi tanır. Doğal olanı da budur zaten. Çocuklarımdan biri, ne eşimin ne de benim tanıdığım bir arkadaşını eve getirdiğinde, eşimle ben evdeki beş kişiden üçer kişi tanırız. Eğer eve gelen konuğu çocuklarımdan biri ve eşim tanıyorsa, o zaman eşimle o çocuğum evdeki beş kişiden dörder kişi tanırlar.

Buna benzer deneyler yaparsanız, yaptığınız her deneyde en az iki kişinin aynı sayıda insan tanıdığını gözlemleyeceksiniz. Toplulukta üç beş kişi değil, milyonlarca kişi olabilir. O zaman da teorem doğrudur, bu milyonlarca kişiden en az ikisi aynı sayıda insan tanıyordur. (Yazının gerisini okumadan teoremi kanıtlayabilir misiniz?)

Teoremi kanıtlamadan önce, teoremde kullandığım terimleri açıklayayım.

1) "İnsan topluluğu" terimiyle en az iki kişinin bulunduğu toplulukları kastediyorum.

2) Herhangi iki kişinin birbirini ya tanıdığını ya da tanımadığını varsayıyorum. "Sizi gözüm bir yerden ısırıyor" gibi kuşkuya yer yok bu teoremde.

3) Eğer A, B'yi tanıyorsa, B'nin de A'yı tanıdığını varsayıyorum. Örneğin Cumhurbaşkanımızla aynı topluluktaysanız ve siz Cumhurbaşkanımızla bir tarihte tanışmışsanız, Cumhurbaşkanı da sizi tanımak zorunda, unutmaya hakkı yok. Yani, teoremimizde, "ben sizi tanırım, ama siz beni tanımazsınız" gibi alçakgönüllülüğe de yer vermiyoruz.

4) Son bir noktayı daha aydınlatmam gerekiyor. Bir insanın kendini tanıdığını varsayacak mıyız? İster varsayalım ister varsaymayalım, teoremin doğruluğunu etkilemez bu varsayım. Her insanın tanış sayısı – yaptığımız varsayıma göre – ya 1 artar ya 1 eksilir, ama en az iki tanış sayısı arasındaki eşitlik bozulmaz. Biz, teoremi kanıtlarken, bir insanın kendini tanı**ma**dığını varsayacağız. Dolayısıyla, 5 kişilik bir toplulukta, herhangi bir kişinin tanış sayısı 0'la 4 arasında bir sayıdır. Her insanın kendisini tanıdığını varsaysaydık, tanış sayısı 1'le 5 arasında değişecekti.

Genel olarak, toplulukta n kişi varsa, her kişinin tanış sayısı 0'la $n - 1$ arasında değişir. Hiç kimseyi tanımayanın tanış sayısı 0'dır. Herkesi tanıyanınkiyse $n - 1$'dir.

Örneğin, eğer topluluk iki kişiden oluşuyorsa, bu iki kişi ya birbirlerini tanırlar ya da tanımazlar. Birinci olasılıkta her ikisi de birer kişi tanıyordur, ikinci olasılıkta her ikisi de sıfır kişi tanıyordur. Demek ki teoremimiz iki kişilik topluluklar için doğru.

Şimdi genel kanıta geçelim.

Eğer toplulukta n kişi varsa, her kişinin tanış sayısı 0'la $n - 1$ arasında değişir. 0'la $n-1$ arasında n sayı vardır. Herkese bu n sayıdan birini vereceğiz. n kişi ve n sayı var… Herkese ayrı sayı düşebilirmiş gibi gelebilir ilk bakışta.

İkinci kez bakalım…

Eğer topluluktan biri 0 kişi tanıyorsa (yani kimseyi tanımıyorsa), bir başkası $n - 1$ kişi (yani herkesi) tanıyamaz. Bunun tersi de doğrudur: Eğer topluluktan biri $n - 1$ kişi (yani herkesi) tanıyorsa, bir başkası 0 kişi tanıyamaz. Dolayısıyla, topluluktaki kişilerin tanış sayıları ya,

$$1, 2, 3, \ldots, n-1$$

ya da,

$$0, 1, 2, \ldots, n-2$$

arasında değişir. Her iki şıkta da tanış sayısı en fazla $n-1$ değer alır.

Bu n kişiye, $n - 1$ sayıyı dağıtacağız. Herkese değişik sayı düşemez, çünkü insan sayısı n ve dağıtacağımız yalnızca $n - 1$ tane sayı var. Dolayısıyla bu durumda en az iki kişinin tanış sayısı eşit olmak zorunda. Burda güvercin yuvası ilkesini uyguladık.

Bir Sihirbazlık. Yöntemin gücünü daha iyi göstermek için bir başka teorem kanıtlayalım. Buram buram sihirbazlık kokan bir teorem... 1'le 50 arasından herhangi on sayı seçin. Şimdi çok iddialı bir şey söyleyeceğim: Bu on sayı arasından, toplamları birbirine eşit olan iki tane beş sayılık küme bulabilirsiniz. Örneğin, diyelim,

$$\{2, 5, 24, 26, 27, 30, 33, 34, 42, 50\}$$

sayılarını seçtiniz. Aşağıdaki beş öğeli altkümelere bakalım:

$$\{2,24,27,33,42\} \quad \text{ve} \quad \{5,26,30,33,34\}.$$

Bu iki kümenin sayılarının toplamları birbirine eşittir. İnanmazsanız toplayın.

İsterseniz başka on sayı seçin. Biraz denerseniz – ne sihirdir ne keramet – seçtiğiniz on sayı arasından, toplamları eşit olan iki tane beş sayılık küme bulabilirsiniz.

Bu savı kanıtlayalım. A, on sayılık kümemiz olsun. A'nın kaç tane beş öğeli altkümesi vardır?

$$\binom{10}{5} = 252$$

tane vardır. Bu sayıyı aklımızda tutalım, birazdan gerekecek. Her beş öğelik altkümenin sayılarının toplamı en az

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

olabilir, en çok da

$$46 + 47 + 48 + 49 + 50 = 240.$$

Demek ki toplamlar 15'le 240 arasında değişiyor. 15'le 240 arasında

$$240 - 15 + 1 = 226$$

sayı vardır. Bu sayı da önemli olacak, aklımızda tutalım.

Demek ki, 252 tane beş öğelik altkümenin sayılarının toplamı (15'le 240 arasındaki) 226 sayıdan biri olmalı. 252, 226'dan daha büyük olduğundan, güvercin yuvası ilkesine göre, bu 252 altkümeden en az ikisi aynı toplamı vermeli. Teoremimiz kanıtlanmıştır.

Bir Başka Sihirbazlık. Bir başka sihirbazlık daha yapalım. n herhangi bir sayı olsun ve rastgele n tane tamsayı seçin. Bu sayıların hepsi birbirinden değişik olmayabilir.

Şu savı ortaya atıyorum**. Bu *n* sayıdan birkaçının toplamı *n*'ye bölünür.**

Örneğin $n = 5$ ise ve 2, 4, 9, 9, 17 sayılarını seçmişsek, 2 + 9 + 9, 5'e bölünür (ya da 9 + 9 + 17).

Savı kanıtlayalım. Sayılarımıza,

$$a_1, a_2, \ldots , a_n$$

adını verelim. Aşağıdaki $n + 1$ sayıyı ele alalım:

$$
\begin{array}{l}
0 \\
a_1 \\
a_1 + a_2 \\
a_1 + a_2 + a_3 \\
\vdots \\
a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n
\end{array}
$$

Bu $n + 1$ sayının herbirini n'ye bölündüğünde, kalan 0'la $n - 1$ arasında bir sayıdır. 0'la $n - 1$ arasındaysa yalnızca n tane sayı vardır. n, $n + 1$'den küçük olduğundan (şansa bak!), güvercin yuvası ilkesine göre, yukardaki $n + 1$ sayıdan ikisi n'ye bölündüğünde kalanları eşittir. Bu iki sayıdan küçüğünü büyüğünden çıkarırsak, elde ettiğimiz sayı n'ye tam olarak bölünür (ve en başta seçtiğimiz n sayıdan birkaçının toplamıdır.)

Şapkadan güvercin çıkarmak diye işte ben buna derim.