

Renkli Noktalar

Ali Nesin

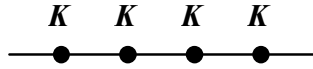
Her noktası ya maviye ya kırmızıya boyanmış bir düzlem önündeyiz. Bazı noktaları maviye, bazı noktaları kırmızıya boyanmış bir düzlem... Düzlemin sonsuz tane noktasını kim boyamışsa boyamış, biri boyamış ve önümüze getirmiş.

Düzlem nasıl boyanmış olursa olsun, bu düzlemde dört köşesi de aynı renk olan bir dikdörtgen var mıdır? Yani bu düzlemde ya dört köşesi birden mavi ya da dört köşesi birden kırmızı olan bir dikdörtgen bulabilir miyiz?

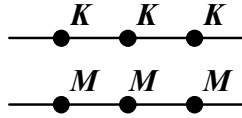
Yanıt: Evet¹!

Yanıtı verdik, şimdi yanıtın doğru olduğunu kanıtlayalım:

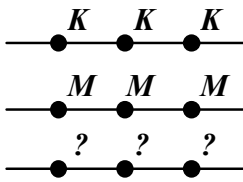
Yatay bir doğru üzerinde bulunan 7 nokta ele alalım. Noktalar iki renge boyanmış olduğundan, bu 7 noktanın en az dördü aynı renkte olmalıdır, diyelim kırmızı. Demek ki aynı yatay doğru üzerinde bulunan dört kırmızı noktamız var. İşte o dört kırmızı nokta:



Bu doğrunun altında ikinci bir yatay doğru ele alalım. Bu ikinci yatayın üstünde bulunan ve yukarda bulduğumuz dört kırmızı noktanın hemen altında yer alan dört noktaya bakalım. Eğer bu noktaların ikisi kırmızıysa, kırmızı köşeli bir dikdörtgen elde ederiz. Demek ki bu noktaların en az üçünün mavi olduğunu varsayabiliriz.



Şimdi yukardaki doğruların altında üçüncü bir yatay doğru ele alalım. Yeni doğrumuzun üstünde bulunan yukardaki noktaların hemen altındaki noktalara bakalım.



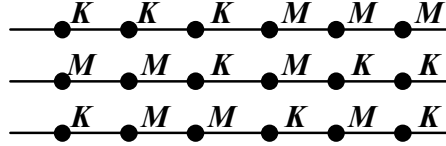
Bu üç noktanın ya ikisi kırmızı ya da ikisi mavi olmak zorunda. Birinci şıkta kırmızı köşeli bir dikdörtgen buluruz, ikinci şıkta mavi köşeli bir dikdörtgen.

Görüldüğü gibi aynı renk köşeli bir dikdörtgen bulmak için sonsuz noktalı bir düzleme gereksinimiyoruz. Eğer üç koşul doğru üzerinde üstüste yedişer nokta iki renge boyanmışsa, her dört köşesi de aynı renkte olan bir dikdörtgen bulabiliriz. Yani 7×3 noktalı bir düzlemin her noktası ya maviye ya kırmızıya boyanmışsa, bu düzlemde iki kenarı yatay olan ve dört köşesi de aynı renge boyanmış bir dikdörtgen bulabiliriz.

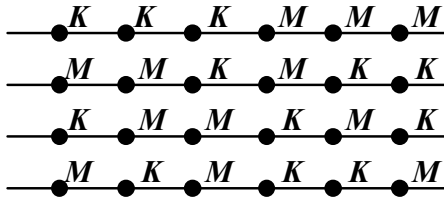
Bundan böyle sonlu düzlemleri ve iki kenarı yatay olan dikdörtgenleri ele alacağız. Eğer $n \times m$ noktalı bir düzlemi, içinde dört köşesi de aynı renk olan ve iki kenarı yatay olan bir dikdörtgen bulunmayacak biçimde boyayabiliyorsak, bu düzleme **2-boyanabilir düzlem** diyeceğiz. Yukarda da gördüğümüz gibi 7×3 'lük düzlem 2-boyanamaz.

Öte yandan 6×3 noktalı düzlem 2-boyanabilir:

¹ Hatta bir tane değil, sonsuz tane öyle dikdörtgen bulabiliriz. Dahası, renk sayımız iki değil de sonlu herhangi bir sayı olsaydı da sonsuz tane öyle dikdörtgen bulabilirdik. Bu dediğimin doğruluğu yazıdan çıkacak.



Yukardaki düzlemi 2-boyanabilir biçimde büyütülebilir miyiz? Bir kolon daha ekleyemeyeceğimizi biliyoruz, çünkü yukarda da gördüğümüz gibi 7×3 'lük düzlem 2-boyanamıyor. Peki bir sıra daha ekleyebilir miyiz? Evet:



Bu düzlemi büyüttüp bir başka 2-boyanabilir düzlem elde edemeyiz. Okur bunu kendi kendine doğrulayabilir. Ama bu 6×5 'lik düzlemin 2-boyanabilir olmayacağı anlamına gelmez. 6×5 'lik düzlemin 2-boyanamaz olduğu doğrudur. Bunu kanıtlamak için, 5×5 'lik düzlemin 2-boyanamaz olduğunu kanıtlamak yeterlidir.

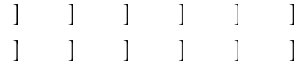
Bunun kanıtını da okura bırakıyorum.

Demek ki 6×4 boyutundaki düzlem 2-boyanabilir ve daha büyük boyutlu 2-boyanabilir düzlem yoktur.

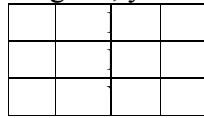
Şimdi sıra üç renge ve 3-boyanabilir düzlemlere geldi. Renklerimiz kırmızı, mavi ve yeşil olsun. Eğer düzlemde yatay (ya da dikey) yalnızca 3 doğru varsa, her doğruyu bir başka renge boyayarak, 3-boyanabilir bir düzlem elde edebiliriz. Dolayısıyla, en az dört yatay ve en az dört dikey doğru olduğunu varsayacağız.

Eğer düzlemde herbiri en az 34 noktalı en az dört koşul doğru varsa, aynı renk köşeli bir dikdörtgen de vardır, yani 34×4 boyutlu bir düzlem 3-boyanamaz. Bunu kanıtlayalım:

Birinci doğru üstünde 34 nokta var ve bu noktalar üç renge boyanmış. Demek ki bu 34 noktanın en az 12 tanesi aynı renge boyanmış olmalı, diyelim kırmızıya. İkinci doğrunun üstünde bulunan ve yukardaki 12 kırmızı noktanın altındaki noktalara bakalım. Eğer yeni 12 noktanın ikisi kırmızıysa, kırmızı bir dikdörtgen elde ederiz. Demek ki ikinci doğru üstünde en fazla bir tane kırmızı nokta olduğunu varsayabiliriz. Geriye kalan 11 nokta yeşile ve maviye boyanmıştır. Bu 11 noktanın en az 6'sı aynı renge boyanmış olmalı, diyelim maviye. Demek ki,



şeklini elde ettik (noktaları artık göstermiyoruz, yalnızca renkleri gösteriyoruz.) Üçüncü doğrumuzu alalım ve bu doğru üstünde bulunan ve yukardaki altı noktanın hemen altındaki noktalara bakalım. Eğer bu noktaların ikisi kırmızıysa, kırmızı bir dikdörtgen elde ederiz; eğer ikisi maviyse, mavi bir dikdörtgen elde ederiz. Demek ki üçüncü doğru üzerinde en fazla bir kırmızı ve bir mavi nokta olduğunu, yani en az dört yeşil nokta olduğunu varsayabiliriz. Şimdi,

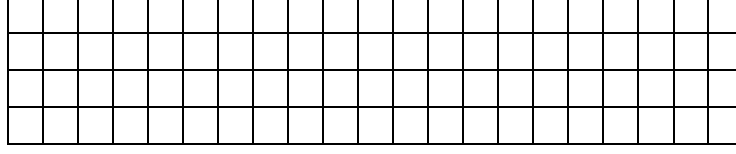


şeklini elde ettik. Son olarak dördüncü doğrumuzu ele alalım. Yukardaki dört noktanın altındaki noktalara bakalım. Bu dört noktanın ikisi aynı renkte olmalı. Bu renk ne olursa olsun, o renkte bir dikdörtgen elde ederiz.

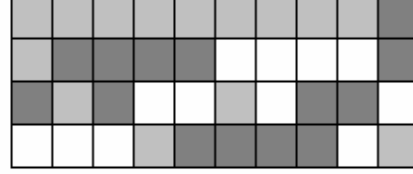
Demek ki 3-boyanabilir bir düzlemde en az dört koşul doğru varsa her doğrudaki 34 nokta olamaz. Peki ya 33 nokta olabilir mi?

Hayır, 33 nokta da olamaz. Ya 32 nokta? 32 nokta da olamaz. 28 nokta bile olamaz. Bunu kanıtladım. Ancak kanıtım güzel olmadığından göstermeyeceğim. Demek ki 27×4 'lük bir düzlem 3-boyanabilir olabilir. 27×4 'lük düzlemin 3-boyanabilir olup olmadığını bilmiyorum.

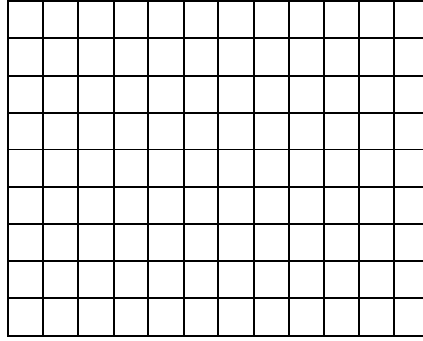
Denemeyle 21×4 'lük düzlemin 3-boyanabilir olduğunu buldum. İşte o düzlem (renk yerine 0, 1 ve 2 sayılarını kullandım):



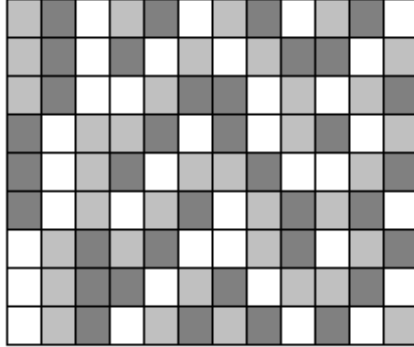
Aynı kareyi
renklerle yapalım,
daha güzel:



Bir de 9×12 boyutlu düzlemi 3 renge boyadım. İşte o düzlem:



Bu düzlemi de renklendirelim:



Nasıl bulduğumu sormayın, ben de bilmiyorum.