

# Ramsey Teoremi

Ali Nesin

Bir odada sonsuz tane insanın bulunduğunu varsayalım. Bu odada bulunan herhangi iki kişi birbirlerini ya tanırlar ya da tanımazlar. Burası belli. Yanıtı belli olmayan soru şu: Bu odadan, öyle sonsuz tane insan seçebilir miyiz ki, bu seçtiğimiz insanların ya hepsi birbirini tanınsın ya da hiçkimse kimseyi tanımasın?

Yanıt, okurun da tahmin ettiğini sandığım gibi, “evet, seçebiliriz”dir. Bu, Ramsey adlı bir matematikçinin kanıtladığı çok ünlü bir teoremin sonucudur. Ramsey Teoremi bugün dallanıp budaklanmış, matematikte **Ramsey Kuramı** adında başlıbaşına bir dal olmuştur. Bu yazıda Ramsey’in bu ünlü teoremini kanıtlayacağız.

Önce yukardaki soruyu matematikselleştirelim. Her insanı bir nokta olarak gösterelim. Eğer iki insan birbirini tanıyorsa, bu iki insana eşdüşen noktaları kırmızı bir çizgiyle birleştirelim. Eğer iki insan birbirini tanımıyorsa, bu iki insana eşdüşen noktaları mavi bir çizgiyle birleştirelim. Her ikisi kırmızı ya da mavi çizgiyle birleştirilmiş sonsuz tane nokta elde ettik. Bu noktalar arasından, hep aynı renkle (ya hep kırmızıyla ya hep maviyle) birleştirilmiş sonsuz tane nokta bulacağız.

Kanıtımıza başlıyoruz.

Kanıtımızı iki aşamada gerçekleştireceğiz. Birinci aşamada öyle sonsuz tane

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots$$

noktası bulacağız ki, **her  $a_i$  kendisinden sonra gelen**

$$a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots$$

**noktalarıyla aynı renk çizgiyle** (ya hep kırmızı, ya hep mavi çizgiyle) bağlanmış olsun.

Birinci noktayı seçmek kolay. Herhangi bir  $a_0$  noktası işi görür.  $a_1, a_2, a_3, \dots$  noktalarını biraz daha dikkatli seçeceğiz. Bu  $a_1, a_2, a_3, \dots$  noktalarını öyle seçmeliyiz ki,  $a_0$  noktası bu noktalarla hep aynı renk çizgiyle bağlanmış olsun.

$a_0$  noktası, (kişileri simgeleyen) öbür noktalarla ya kırmızı ya da mavi bir çizgiyle bağlanmıştır. Sonsuz tane nokta olduğundan ve yalnızca iki renk bağlantı olduğundan,  $a_0$ ’ın aynı renk çizgiyle bağlandığı sonsuz tane nokta vardır.  $a_0$ ’ın hep aynı renk çizgiyle bağlandığı sonsuz bir nokta kümesi alalım. Bu kümeye  $A_0$  diyelim. Demek ki,

**$a_0, A_0$ ’ın noktalarıyla hep aynı renk çizgiyle bağlanmıştır.**

Bunu aklımızda tutalım.  $a_1, a_2, a_3, \dots$  noktalarını bu  $A_0$  kümesinde seçeceğiz. Böylece  $a_0$  noktası istediğimiz koşulu sağlamış olacak.

Şimdi  $A_0$ ’dan herhangi bir  $a_1$  noktası alalım.  $a_1$  noktası,  $A_0$ ’ın öbür noktalarına ya kırmızı ya da mavi bir renkle bağlanmıştır.  $A_0$ ’da sonsuz tane nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan,  $A_0$  kümesinde,  $a_1$ ’in aynı renk çizgiyle bağlandığı sonsuz tane nokta vardır. Yani, ya

$$\{a \in A_0: a_1 \text{ noktası } a \text{’yla kırmızı bir çizgiyle bağlanmış}\}$$

kümesi, ya da

$$\{a \in A_0: a_1 \text{ noktası } a \text{’yla mavi bir çizgiyle bağlanmış}\}$$

kümesi sonsuzdur. Bu kümelerden sonsuz olanına  $A_1$  adını verelim. Demek ki,

**$a_1, A_1$ ’in noktalarıyla hep aynı renk çizgiyle bağlanmıştır.**

$a_2, a_3, a_4, \dots$  noktalarını  $A_1$ ’de seçeceğiz ve böylece yukardaki koşul  $a_1$  için sağlanmış olacak.

Şimdi  $A_1$ ’den herhangi bir  $a_2$  noktası alalım.  $a_2$  noktası  $A_1$ ’in öbür noktalarıyla ya kırmızı ya da mavi bir çizgiyle bağlanmıştır.  $A_1$ ’de sonsuz nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan,  $A_1$ ’de,  $a_2$ ’in hep aynı renkle bağlandığı sonsuz tane nokta vardır. Bir başka deyişle, ya

$\{a \in A_1: a_2 \text{ noktası } a \text{yla kırmızı bir çizgiyle bağlanmış}\}$

kümesi, ya da

$\{a \in A_1: a_2 \text{ noktası } a \text{yla mavi bir çizgiyle bağlanmış}\}$

kümesi sonsuzdur. Bu kümelerden sonsuz olanına  $A_2$  adını verelim. Demek ki,

**$a_2, A_2$ 'nin noktalarıyla hep aynı renk çizgiyle bağlanmıştır.**

$a_3, a_4, a_5, \dots$  noktalarını  $A_2$ 'de seçeceğiz ve böylece yukardaki koşul  $a_2$  için sağlanmış olacak.

Şimdi  $A_2$ 'den herhangi bir  $a_3$  noktası alalım. Yukarda yaptıklarımızı  $a_3$  ve  $A_2$  için yapalım.  $A_2$ 'nin içinde, öyle bir sonsuz  $A_3$  kümesi bulalım ki,  $a_3, A_3$ 'ün her noktasıyla hep aynı renk çizgiyle bağlanmış olsun.

Bunu böylece sonsuza değin sürdürebiliriz. Demek ki, öyle

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots$

noktaları bulabiliriz ki, her nokta kendisinden sonra gelen noktalarla aynı renk çizgiyle bağlanmış olsun.

Kanıtın birinci aşamasını tamamladık. Sıra ikinci aşamaya geldi.

Yukarda dikkatle seçtiğimiz bu  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  noktalarının herbirine bir renk vereceğiz. Eğer bir nokta kendisinden sonra gelen noktalarla hep kırmızı çizgiyle bağlanmışsa, o noktaya **kırmızı nokta** diyeceğiz. Yoksa, o noktaya **mavi nokta** diyeceğiz. Örneğin, eğer  $a_0$  noktası, kendisinden sonra gelen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  noktalarıyla hep kırmızı bir çizgiyle bağlanmışsa,  $a_0$  noktasına kırmızı nokta diyeceğiz. Eğer  $a_5$  noktası kendisinden sonra gelen  $a_6, a_7, a_8, \dots$  noktalarıyla hep mavi çizgiyle bağlanmışsa,  $a_5$  noktasına mavi nokta diyeceğiz.

Sonsuz tane nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan,

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$

noktalarından sonsuz tanesi aynı renk noktadır. Bir başka deyişle, ya kırmızı noktalar kümesi ya da mavi noktalar kümesi sonsuzdur. Matematiksel olarak söyleyecek olursak, ya

$\{a_i: a_i \text{ kırmızı bir nokta}\}$  ya da  $\{a_i: a_i \text{ mavi bir nokta}\}$

kümesi sonsuzdur. İki küme birden de sonsuz olabilir, ama en azından birinin sonsuz olduğunu biliyoruz. İki kümeden sonsuz olanını alalım. Öbür noktaları atalım. Noktalarımızı yeniden adlandırarak, her noktanın aynı renk olduğunu varsayabiliriz, diyelim hepsi kırmızı. Demek ki,

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

noktalarının herbirinin kırmızı olduğunu varsayıyoruz. Bu kümeden iki nokta alalım:  $a_i$  ve  $a_j$ . Diyelim  $i, j$ 'den daha küçük.  $a_i$ , kırmızı bir nokta olduğundan,  $a_i$  noktası  $a_j$  noktasıyla kırmızı bir çizgiyle bağlanmıştır. Demek ki yukardaki sonsuz nokta birbirleriyle aynı renk çizgiyle (kırmızıyla) bağlanmıştır. Ramsey'in teoremi kanıtlanmış oldu.

Elbette iki renkle yaptığımızı üç renkle, dört renkle, genel olarak sonlu renkle de yapabirdik. Ramsey'in asıl teoremi de zaten genel olarak  $n$  renk içindir:

**Ramsey Teoremi:**  $n$  tane renk ve sonsuz tane noktamız olsun. Her iki nokta, bu  $n$  renkten bir çizgiyle birleştirilmiş olsun. O zaman, her iki noktası aynı renk çizgiyle birleştirilmiş sonsuz tane nokta vardır.