Matematiğin Emekleme Çağı Üzerine

Ali Nesin

Eşitlik, benzerlik, yakınlık, uzaklık gibi her sağlıklı insanın günlük yaşamında kullandığı kavramlar aynı zamanda matematiğin önemli kavramlarıdır da. Günümüzün matematiği bunlara benzer “doğal” kavramlar üzerine kurulmuştur. Bu nedenden, matematik bilimi her zaman varolmuştur diyebiliriz.

İlkel insan, mağarasının duvarına resim çizerken soyut bir eşitlik kavramına sahipti. Çizdiği hayvan resmiyle gerçek hayvan arasında bir ilişki kurar, iki ve üç boyutlu iki değişik nesneyi eşleştirirdi. Üstelik çizdiği geyik herhangi bir geyiğin resmiydi. “Herhangi bir geyik”, “genel bir geyik” gibi düşünceler soyutlamaya giden ilk adımlardır. İlkel insan soyutlamaya, dolayısıyla matematikçileşmeye böyle başladı. Bu evreden “x bir geyik olsun” evresine geçmek için küçücük bir adım gerek. Bu küçücük adım insanlığın binlerce yılını almıştır.

İlkel insanın mağara duvarlarına çizdiği geyiğin, gerçek geyik gibi, dört ayağı, iki gözü, bir burnu vardı. Gerçekten, bilinçli olarak sayı sayıp sayamadıklarını bilmiyoruz ama, sözsüz ve yazısız da olsa bir tür sayı kavramına sahip oldukları apaçık. Hayvanlarda da vardır ilkel bir sayı kavramı. Hayvanların sayı kavramı üzerine oldukça araştırma yapılmış ve bilimsel yazı yazılmıştır. Örneğin, kargaların dörde kadar sayabildikleri söylenir.

İlkel insan küçük sayıları yanyana koyarak büyük sayıları elde edebileceğini bir süre sonra buldu. Örneğin bugün sayıları yazmak için 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9 rakamlarını kullanırız. On rakam kullandığımızdan sayı sistemimize “onluk sistem” deriz. Onluk sistemin neden öbür sistemlerden daha kullanışlı ve yaygın olduğunu anlamak oldukça kolay: İki elimizin on parmağı var.

İkilik sistemde yalnızca iki rakam (tercihen 0 ve 1 rakamları) kullanılır. Bu sistemde 0 ile 9 arasındaki sayılar sırasıyla şöyle yazılır:

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001.

Görüldüğü gibi bu sistemde 2 ve 2’den büyük rakamlar kullanılmaz. Her sayı 0 ve 1 rakamlarıyla yazılır. 2 yerine 10, 3 yerine 11, 4 yerine 100 yazılır.

Beşlik sistemdeyse 5 ve 5’ten büyük rakamlar kullanılmaz. Her sayı 0, 1, 2, 3 ve 4 rakamlarıyla yazılır. Örneğin, 5 yerine 10, 6 yerine 11, 25 yerine 100 yazılır.

Onbirlik sistemde on bir rakam vardır: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, #. Bu sitemde,

10 yerine #,
11 yerine 10,
12 yerine 11,
21 yerine 1#,
22 yerine 20,
110 yerine #0

yazarız.

Bütün sayıları ilk ilk, ilk beş, ilk on iki, ilk yirmi sayıyı kullanarak ifade eden toplumlar da vardı. *Sayılar ve İmgeleme Gücü* adlı yazımızda bu kavimlerden örnekler vereceğiz. Çağımızdan ve Batı uygarlığından da örnekler verebiliriz. Fransızlar 70’e “soi*x*ante-di*x*”, yani “altmış-on” derler. Demek ki Fransızların ataları bir zamanlar altmışlık sistemi kullanmışlar, yetmişi dillerine daha sonra eklemişler. Fransızlar 80 için “quatre-vingts”, yani “dört-yirmi” derler. Bundan da Fransızların atalarının, altmışlık sistemin yanısıra yirmilik sistemi de kullandıkları anlaşılıyor.

Türkçemiz de bu konuda ilginç bir gelişme göstermişe benzer. On bir (10+1), on iki (10+2), on üç (10+3) gibi sayılara bakacak olursak, atalarımızın onluk sistemi kullandıkları anlaşılır. Öte yandan, on, yirmi, otuz, kırk, elli sayılarının bir, iki, üç, dört, beş sayılarıyla herhangi bir ses benzerliği yoktur. Ama altmış, yetmiş, seksen ve doksan sayılarının altı, yedi, sekiz ve dokuzla ses benzerliği vardır. Altmış altıdan, yetmiş yediden, seksen sekizden ve doksan dokuzdan türemiş belli ki. Demek ki bizim de bir zamanlar altmışlık sistemimiz varmış. Bugün hem onluk, hem altmışlık sistemi içeren bir sayı sistemini kullanıyoruz. Birazdan göreceğimiz gibi Babilliler de buna benzer bir sistem kullanıyorlardı. Bundan da sayı sistemimizin Mezopotamya’dan geldiği kanısına kapılıyorum. Konunun uzmanlarının ne düşündüklerini bilmiyorum.

Türkçe’nin sayı sistemine ilişkin ikinci bir gözlem, altmış ve yetmiş sayılarının yapısıyla seksen ve doksan sayılarının yapısı arasındaki ayrımla ilgili: Altmış ve yetmiş, altı ve yediden aynı yapı değişikliğine uğrayarak türemiş. Oysa seksen ve doksanın yapıları değişik. Bundan da şu çıkabilir: 80 ve 90 sayılarını 60 ve 70 sayılarından çok daha sonra keşfetmişiz[1].

Çok az bildiğimiz ve günümüzü pek az etkilemiş olan Aztek ve Maya uygarlıklarını saymazsak, Yunan öncesi uygarlıklardan dördü matematikte küçümsenemeyecek ilerlemeler kaydetmişlerdir:

- Hintliler
- Çinliler
- Babilliler
- Mısırlılar

Üzerine en az bildiğimiz Hint matematiğidir. Çok büyük sayılarla ilgilendiklerini biliyoruz. Ancak bu büyük sayılarla bir işe yaradıklarından değil, dinsel nedenlerle ilgilenirlerdi. Epik şiirlerinden birinde (Lalitavistava) 53 rakamlı bir sayı vardır! Bugün kimi matematikçi, bir, iki, üç gibi sayı kavramlarının 5 milyar, 3 trilyon gibi kavramlardan daha somut kavramlar olduklarını savunur. Ne demek istediklerini biraz sezinliyorum sanıyorum. Örneğin üç saniyenin ne demek olduğunu hepimiz aşağı yukarı biliriz. Otuz yıl da bizim için bir anlam ifade eder. Oysa 1 milyar saniye? 1 milyar saniyeyi algılamak pek kolay değil. Hesapladım, 1 milyar saniye 30 yıl ediyor aşağı yukarı. Yani “30 yıl = 1 milyar saniye” eşitliği öyle bildiğimiz sıradan eşitliklerden değil. Sol taraftaki terimin anlamını algılayabiliyoruz, ama sağ taraftaki terim bize çok yabancı.

Milyarı algılamanın bir başka yolu da ortalama yaşamın 2 milyar saniyeden biraz fazla olduğunu düşünmektir. Doğduğunuz andan 2 milyar saniye sonra 60 yaşında olacaksınız.

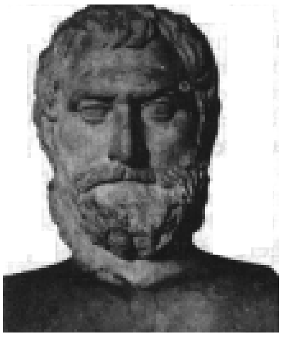
Çin matematiğine değgin bilgimiz biraz daha fazla. Onlarda da büyük sayı mistisizmi vardı. Pisagor’un (MÖ. 580–500) eşek teoremini[2] ve sihirli kareleri[3] biliyorlardı. Ama Pisagor’un eşek teoreminin kanıtından habersizdiler. Kanıt kavramını Eski Yunanlı Tales (İ.Ö. 624–547) bulmuştur. Çinliler, Pisagor’un eşek teoremini kanıtlamaya gereksinim bile

1 Doç. Dr. Yusuf Gürsey’den edindiğim bilgiye göre, altmış ve yetmişteki “mış” ve “miş” sonekleri, Moğolca on sayısından türemiş ve seksen ve doksandaki “en” ve “an” sonekleri Türkçe on sayısından türemiş.

2 **Hata! Yer işareti tanımlanmamış.** bakınız.

3 Sihirli Kareler yazılarına bakın.

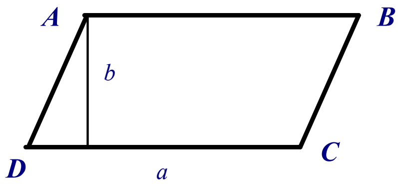
duymadan, deneyle bulmuşlardı[4]. Bunun yanı sıra üçgenin ve koşutgenin alanlarını biliyorlardı. Biz de bulalım bu alanları.



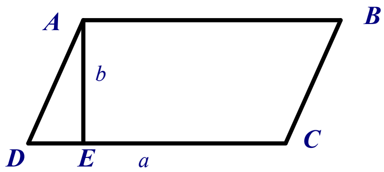
Tales

Bilindiği gibi yoktan bir şey varolmaz. Matematikte de **belit**siz (aksiyomsuz) teorem kanıtlanamaz. Bir bilgiye varmak için bir takım varsayımların tartışmasız kabul edilmesi gerekmektedir. Bu varsayımlar genellikle öylesine doğaldır ki, matematiğe yabancı birisi bu varsayımların ayrımına varmaz bile. Aşağıda da bir takım varsayımlar kullanacağız. Bunlardan bir tanesi dikdörtgenlerin alanıyla ilgili: Uzunluğu a, genişliği b olan bir dikdörtgenin alanı ab'dir. Bu önermeyi, kanıtlamadan, **belit** olarak kabul edeceğiz. Başka varsayımlarda da bulunacağız.

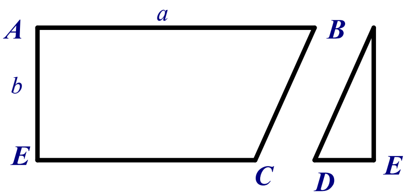
İlk olarak bir koşutgenin alanını bulalım. *ABCD*, boyutları aşağıdaki gibi olan bir koşutgen olsun:



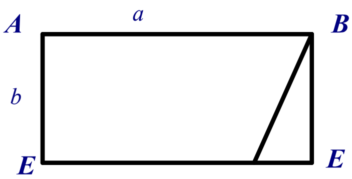
A noktasından *DC* doğrusuna bir dik inelim:



Şimdi de *DAE* üçgenini kesip koşutgenimizin sağına yapıştıralım:



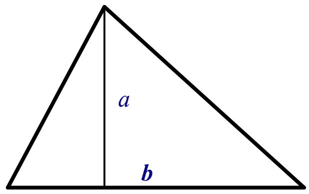
Aşağıdaki gibi bir şekil elde ederiz:



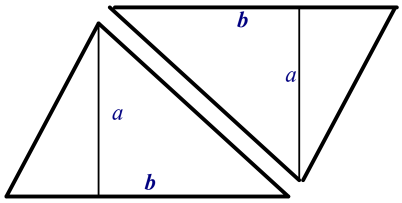
4 Çinliler bu deneye dayanan yöntemle doğru olmayan teoremler de "kanıtlamışlardır". Asal Sayılar başlıklı yazımızda Çinlilerin yanlış teoremlerine bir örnek vereceğiz. **Hata! Yer işareti tanımlanmamış.**sayfaya bakınız.

Koşutgenimiz dikdörtgen oldu ama alanı değişmedi. Dolayısıyla koşutgenimizin alanı yukardaki dikdörtgenin alanına, yani *ab*'ye eşittir.

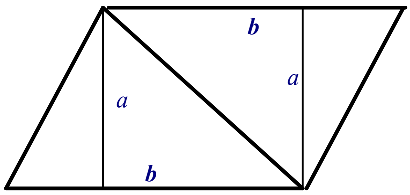
Şimdi bir üçgenin alanını hesaplayabiliriz. *ABC*, aşağıda boyutları gösterilen üçgen olsun:



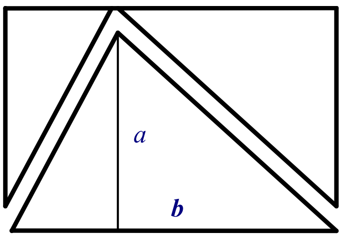
Bu üçgenin bir eşini ters çevirip yukardaki üçgene yapıştıralım:



Aşağıdaki koşutgeni elde ederiz:



Bu koşutgenin alanı, biraz önce de hesapladığımız gibi, *ab*'dir. Ama aynı zamanda, alanını hesaplamak istediğimiz üçgenin iki katıdır. Demek ki üçgenimizin alanı *ab*'nin yarısı, yani *ab/*2'dir. Üçgenin alanını böylece bulduk.

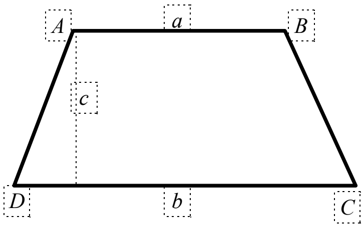


Bunu yandaki şekilde de görebiliriz:

İlkokul çocuklarının bile anlayabilecekleri bu kanıtları ne yazık ki çoğu çocuk bilmez. Oysa olağanüstü güzellikteki bu kanıtları erken yaşlarda görmek bütün bir yaşamı değiştirebilir.

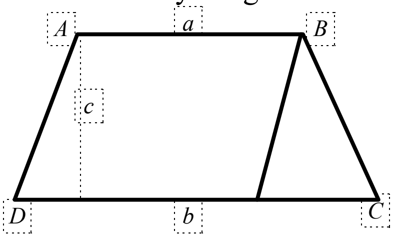
Cimnastik derslerinde hazırola ve rahata geçmenin öğretildiği bir eğitim sisteminden düşünmesini öğretmesi beklenebilir mi? Evet, ilkokullarımızda parmak kadar çocuklara askercilik öğretiliyor. Bense çocuklarımızın düşünmesini istiyorum.

Mısırlılara gelelim. Mısırlılar çağlarının en iyi mühendisleri, kimyagerleri ve doktorlarıydı. Piramitleri İ.Ö. 3000 ile 2000 yılları arasında yapmışlardır. Yapılan ölçümlere göre bu piramitlerin açıları arasında yalnızca 1/27000'lik bir fark varmış. Birkaç yıl öncesinin İsviçre saatleriyle karşılaştırılabilecek bir doğruluk derecesi.



Bir yılın 365 gün olduğunu ya da olması gerektiğini ilk bulan Mısırlılardır. Dikdörtgenin ve trapezin alanlarını hesaplamasını da biliyorlardı. Mısırlılardan geri mi kalacağız, boyutları yukardaki gibi olan bir *ABCD* trapezinin alanını biz de hesaplayalım.

B'den *DC*'ye doğru *AB* kenarına bir koşut çekelim:



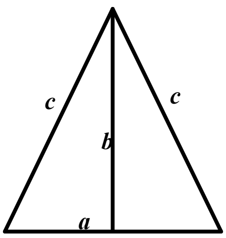
Böylece bir *ABED* koşutgeni ve bir *BCE* üçgeni elde ettik. Demek ki trapezimizin alanı koşutgenin ve üçgenin alanlarının toplamına eşit. Bu alanları daha önce hesaplamıştık.

ABED koşutgenin alanı = ac

BCE üçgeninin alanı = $(b–a)c/2$

Bu iki alanı toplayalım:

ABCD trapezinin alanı = $ac + (b–a)c/2 = (a+b)c/2$.



Mısırlılar trapezin alanını bizim bulduğumuz gibi bulmamışlardı. Çünkü kanıt nedir bilmiyorlardı ve – en önemlisi – üçgenin alanını yanlış hesaplıyorlardı. Örneğin yandaki ikizkenar üçgenin alanını $ac/2$ olarak hesaplıyorlardı. Oysa biraz önce de gördüğümüz gibi gerçek alan $ab/2$'dir. Yani Mısırlıların hesapladıkları alan gerçek alandan daha büyüktü.

Yarıçapı r olan bir dairenin alanı Mısırlılara göre $256r^2/81$ idi. Gerçek alan, herkesin bildiği gibi, πr^2'dir. 256/81 sayısı aşağı yukarı 3,1605 olduğundan, yani π'den büyük olduğundan, Mısırlılar bir kez daha gerçek alandan daha büyük bir alan bulmuşlar.

Mısırlılar alan ölçümlerini Nil kıyılarında tarım yapan köylülerden vergi toplamak için kullanırlardı. Mısırlıların alanları gerçek alandan daha fazla olduğundan, toplamaları gereken vergiden her zaman daha fazla vergi toplarlardı. Belki de eski Mısır bilimi devlet çıkarlarına hizmet ettiren ilk devletti.

Mısır bilimi üzerine bilinenlerin çoğu Ahmes adlı bir din adamının yazdığı papirüsten öğrenilmiştir [10]. Bugün İngilizlerin emin (!) ellerinde olan bu papirüsün İ.Ö. 2000 ile 1800 yılları arasında yazıldığı sanılıyor.

Mısırlıların onluk sayı sistemi vardı. biri, onu ve yüzü simgeliyordu. Gemi çıpasını andıran bir simge bini, kırık bir sopa onbini, sola bakan bir kuş da yüzbini simgeliyordu. Örneğin 343 yazmak için Mısırlılar,

yazarlardı. Çarpma ve bölme işlemlerindeyse ikilik sistem kullanırlardı. Diyelim 7 × 13'ü hesaplamak istiyorlar. Önce 13'ü ikinin katlarının toplamı olarak yazarlardı:

$$13 = 1 + 4 + 8.$$

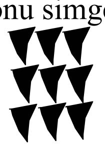
Sonra 7'yi sırasıyla 1'le, 2'yle, 4'le, 8'le çarparlardı:

1	7
2	14
4	28
8	56

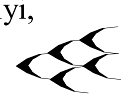
Sonra da, 7 × 13 = 7 × (1+4+8) = (7×1) + (7×4) + (7×8) = 7 + 28 + 56 = 91 eşitliklerini kullanarak çarpımlarını yaparlardı. Görüldüğü gibi, yapılan işlem, çarpmadan çok birkaç toplamaya benziyor.

Bölmeyi de buna benzer bir yöntemle yaparlardı. 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 gibi $1/n$ biçiminde yazılabilen sayıları yazabiliyorlardı. Öte yandan 2/5 gibi kesirli sayıları kolaylıkla yazamıyorlardı. 2/5 yerine, örneğin, 1/3 + 1/15 yazarlardı. $1/n$ biçiminde yazılabilen kesirli sayılardan başka kullanabildikleri tek kesirli sayı 2/3'tü.

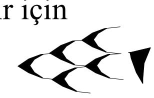
Babillilerin (aşağı yukarı İ.Ö. 2000) sayı sistemleri onluk sistemle altmışlık sistemin bir karışımıydı.  simgesi biri,  simgesi onu simgeliyordu. İkiyi  olarak, dokuzu,



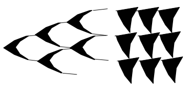
olarak yazıyorlardı.  simgesi yirmiyi,

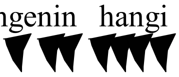


simgesiyse elliyi simgeliyordu. Elli bir için



ellidokuz için



kullanıyorlardı. Altmışa geldiklerinde bunun böyle süremeyeceğini anladılar. Altmış için yeni bir simge yaratacaklarına, "bir" için kullandıkları simgeyi kullandılar. Yani  simgesi hem biri, hem de altmışı simgeliyordu. Simgenin hangi sayıyı simgelediği ancak kullanıldığı bağlamda anlaşılabiliyordu. Örneğin,  sayısı,

$$(1 \times 60^2) + (2 \times 60) + 4 = 3724$$

sayısını simgeliyordu. Kimi zaman da simgelenen sayıyı anlamak pek kolay olmuyordu. Örneğin,  simgesi,

$$(2 \times 60) + 23 = 143$$

sayısını simgeleyebildiği gibi,

$$(2 \times 60^2) + (23 \times 60) = 8580$$

sayısını, hatta,

$$(2 \times 60^2) + 23 = 7223$$

sayısını da simgeleyebiliyordu. Bu zorluk sıfır sayısının yokluğundan kaynaklanıyor. Sıfır sayısının tam ne zaman bulunduğu üzerine çeşitli söylentiler var. Babillilerden sonra bulunduğu kesin. İ.Ö. 700 yılında [24] ya da çok daha sonra, ikibin yıl sonra bulunmuş olabilir.

Bugün zaman birimlerinde Babilliler gibi 60'lık sistemi kullanırız. Örneğin, yukardaki  sayısını, yani bugün kullandığımız onluk sistemde 3724 sayısını 3724 saniye olarak düşünürsek,

1 saat 2 dakika 4 saniye

olarak yazarız; aynen Babilliler gibi:

$$1^s\, 2'\, 4''.$$

Bugünkü saat sistemimizi Babillilere borçluyuz.

Yazının başında matematiğin “doğal” bir bilim olduğunu çıtlatmıştım. Evet, matematik doğaldır. Ne denli soyut olursa olsun, matematik insanların buluşu değildir. Matematik insanlardan bağımsızdır. Matematik yapmak demek doğanın kanunlarını, zekâsını anlamaya çalışmak demektir. Fizik, kimya gibi değil, kendine özgü, bambaşka yöntemlerle yapar bu işi matematik. Matematik doğanın özünde vardır ve matematikçiler insanlardan bağımsız olan bu matematiği bulmaya, keşfetmeye çalışırlar. Matematik icad edilmez, keşfedilir. π sayısı, çeşitli sonsuzluk kavramları, kümeler kuramı, topoloji, sayılar kuramı, hatta mantık, sözün kısası matematikte her şey, ama her şey doğanın özünde bulunur. Matematikteki konular, kavramlar bizim anlağımızın bir ürünü değildirler, bizim dışımızda da, bizden bağımsız olarak vardırlar.

Bu yüzden evrenimizde yaşayan ve bir tür matematik geliştirecek kerte akıllı olan her yaratık bizim bildiğimiz matematiği önünde sonunda bulur. Çünkü bir tek Matematik vardır: Doğa’nın matematiği[5].

Bu yazdıklarım evrensel olarak kabul edilmiş düşünceler değildir, kanıtlanmaları da pek olası değildir gibi geliyor bana. Matematikle içli dışlı olan çoğu kişi benim gibi düşünür. Ünlü matematikçi Hardy’nin bu konuda yazdıklarını aktarayım [20, Bölüm 22]:

Fiziksel gerçekle maddi dünyayı; gecesi gündüzü olan, depremleri olan, ay ve güneş tutulmaları olan dünyayı; fiziksel bilimlerin anlatmaya çalıştığı dünyayı kastediyorum. [...] *Benim için ve sanırım çoğu matematikçi için “matematiksel gerçek” diye tanımlayacağım başka bir gerçek vardır. Bu matematiksel gerçeğin niteliği hakkında gerek matematikçiler gerek felsefeciler arasında herhangi bir uzlaşma yoktur. Bazılarına göre ‘zihinsel’dir ve onu bir bakıma biz yaratırız; diğerleri ise onun bizim dışımızda ve bizden bağımsız olduğu kanısındadır. Matematiksel gerçeğin ne olduğunu, inandırıcı bir şekilde açıklayabilecek bir kimse metafiziğin en zor problemlerinin çoğunu çözmüş olurdu.* [...] *Benim inancıma göre, matematiksel gerçeklik bizim dışımızdadır; bizim işlevimiz onu bulup çıkarmak ya da gözlemektir; ıspatladığımızı veya tumturaklı sözlerle yarattığımızı söylediğimiz teoremler; gözlemlerimizden çıkardığımız sonuçlardan ibarettir. Bu görüş Eflatun’dan (Platon’dan) bu yana bir çok ünlü filozof tarafından da benimsenmiştir.*

Hardy, aynı kitabın 24. bölümünde matematiksel gerçeklikle fiziksel gerçekliği karşılaştırıyor:

[...] *matematiksel objeler* [nesneler], *çok daha göründükleri gibidirler. Bir iskemle veya bir yıldız hiç de göründüğü gibi değildir; üzerlerinde ne kadar çok düşünürsek, görüntüleri de, duyularımızdan kaynaklanan bir sis içinde, o ölçüde netliğini kaybeder, bulanıklaşır. Buna karşılık, “2” veya “317”nin duyularla ilişkisi yoktur; yakından incelediğimiz ölçüde özellikleri daha da berraklaşır.* [...] *Öte yandan pür matematik, tüm idealizmin çarpıp battığı bir kayadır. 317 bir asaldır; biz öyle düşünüyoruz diye, veya kafa yapımız şu ya da bu şekilde olduğu için değil; çünkü öyledir, çünkü matematiksel gerçeğin yapısı budur.*

5 Bu konu, çok daha geniş olarak, [30]’da, Matematik ve Doğa başlıklı yazıda ele alınmıştır.