Kesirli Sayıları Saymak

Ali Nesin

Altıdan yukarı sayamayan aritmetiği zayıf bir kabilenin reisliğine en fazla hayvanı olan kişi getirilirmiş. Hayvanları nasıl sayarlardı diye merak ediyor insan. Kimin daha fazla hayvanı olduğunu bulmak için saymaya gerek yoktur ki! Hayvanları karşılaştırmak/eşleştirmek yeterlidir. İki reis adayının hayvanları yanyana iki ağıla konur, sonra ağıllardan hayvanlar birer birer çıkarılır. Ağılı ilk boşalan seçimi kaybeder.

İlkel bir kabilenin bulduğu bu iki kümeyi karşılaştırma yöntemini, Batı uygarlığı çok geç bulmuştur. Bu yöntem 19. yüzyılın ikinci yarısında Alman matematikçi Georg Cantor tarafından keşfedilmiştir.

Örneğin şu soruyu soralım:

N, **doğal sayılar kümesi** olsun. Yani,

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3,\ldots\}$$

olsun. **S** de, 0'dan büyük doğal sayılar kümesi olsun. Yani,

$$\mathbf{S} = \{1, 2, 3, 4,\ldots\}$$

kümesi olsun. Bu iki kümeden hangisinde daha fazla sayı vardır?

Okur, büyük bir olasılıkla **N** kümesinde daha fazla sayı olduğunu söyleyecektir. Çünkü, diyecektir okur, **S** kümesi **N** kümesinin bir altkümesidir, yani **S**'nin her öğesi **N** kümesindedir; ayrıca **N** kümesinde **S** kümesinde olmayan 0 sayısı vardır; demek ki **N** kümesinde bir fazla öğe vardır…

Aristo da böyle düşünürdü. Aristo, "Bütün, parçadan daha büyüktür" derdi. Aristo mantığında bu böyleydi. Ama artık değil, en azından matematikte değil. Daha doğrusu çeşitli büyüklük kavramları vardır.

Cantor'un ve günümüzün matematiğinin "öğe sayısı" tanımına göre, her iki kümede de aynı sayıda öğe vardır. İlkel kabilenin eşleştirme yöntemini kullanalım:

$$\begin{array}{rcccccccl} \mathbf{N} = \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbf{S} = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots\} \end{array}$$

Demek ki **S** kümesinin öğeleriyle **N** kümesinin öğeleri arasında eşleşme var: **N** kümesinin **her** öğesini, **N** kümesinin **bir ve bir tek** öğesine eş düşürebiliyoruz.

Cantor'un tanımına göre, eğer iki küme arasında bir "eşleşme" varsa, o zaman iki kümenin "öğe sayısı eşittir". Dolayısıyla **N** ve **S** kümelerinin öğe sayısı birbirine eşittir.

Örneğin, Cantor'a göre, çift tamsayılar bütün tamsayılar kadardır, ne fazla ne eksik. Yani,

$$\mathbf{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,\ldots \}$$

tamsayılar kümesiyle

$$2\mathbf{Z} = \{ \ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6,\ldots \}$$

çift tamsayılar kümesinin öğe sayıları (Cantor'un tanımına göre) birbirine eşittir.

Z kümesiyle 2**Z** kümesinin nasıl eşleştirildiği bariz: n tamsayısını $2n$ tamsayısıyla eşleştirin:

$$\begin{array}{rcccccccl} \mathbf{Z} = \{ \ldots, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots \} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2\mathbf{Z} = \{ \ldots, & -6, & -4, & -2, & 0, & 2, & 4, & 6, & \ldots \} \end{array}$$

"Öyle değildir, görüldüğü gibi **Z** kümesinde 2**Z** kümesinden daha çok öğe vardır" demeyin. Cantor'un **tanımına göre** her iki kümede de eşit sayıda öğe vardır.

"Ama iki küme birbirine eşit değil ki..." de demeyin... Çünkü ben iki kümenin birbirine eşit olduğunu söylemedim ki, yalnızca "aynı sayıda" elemanları olduğunu söyledim.

3/4, 1/2, −56/7 gibi sayılara **kesirli sayı** denir. Kesirli sayılar, iki a ve $b \neq 0$ tamsayıları için a/b biçiminde yazılabilen sayılardır. √2 kesirli bir sayı değildir. √2'nin kesirli olmadığının kanıtını yazılarımda daha önce birkaç vermiştim, bir kez daha vermeyeceğim. π sayısı da kesirli değildir. Ama 5 sayısı kesirlidir, çünkü 5 = 5/1 eşitliği geçerlidir. √4 ve 2π/3π sayıları da kesirlidir.

Pozitif kesirli sayılarla doğal sayılar arasında bir eşleşme vardır.

Birinci Yöntem. Örneğin şöyle:

0/1 → 0
1/1 → 1
1/2 → 2
2/1 → 3
1/3 → 4
3/1 → 5
1/4 → 6
2/3 → 7
3/2 → 8
4/1 → 9
1/5 → 10
5/1 → 11
1/6 → 12
2/5 → 13
3/4 → 14
4/3 → 15
5/2 → 16
6/1 → 17
…..

İki kümeyi nasıl eşleştirdiğimi anlatayım: a/b kesirli sayılarını önce $a + b$ sayısının büyüklüğüne göre diziyoruz, sonra küçük a'dan büyük a'ya gidiyoruz. Tabii aradan daha önce sıraladığımız sayıları çıkarıyoruz. Örneğin, $a + b = 8$ olan kesirli a/b sayılarını şöyle diziyoruz:

1/7, 3/5, 5/3, 7/1.

(2/6, 4/4, 6/2 daha önce dizilmişti.) Daha sonra şu kesirli sayılar geliyor:

1/8, 2/7, 4/5, 5/4, 7/2, 8/1.

Ardından

1/9, 3/7, 7/3, 9/1

sayıları geliyor.

Bu yöntemle 52/47 kesirli sayısının hangi doğal sayıyla eşleştirildiğini bulmak kolay değildir.

Farey'in Yöntemi. Çok tuhaf gelebilecek bir başka eşleştirme daha vardır. İlkokulda sık sık yapılan

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

hatasını kullanır bu yöntem. $\frac{0}{1}$ ve $\frac{1}{0}$ "sayı"larından başlayalım (son "sayı"yı umursamayın şimdilik):

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$$

Bu iki "sayı"nın tam ortasına, "toplam"ları olan $\frac{0}{1} + \frac{1}{0} = \frac{1}{1}$ sayısını yazalım:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}$$

İki yeni aralığımız var: $[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}]$ ve $[\frac{1}{1}, \frac{1}{0}]$ aralıkları. Bu aralıklara uçların "toplam"larını, yani,

$$\frac{0}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \text{ ve } \frac{1}{1} + \frac{1}{0} = \frac{2}{1}$$

sayılarını yazalım:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}$$

Bu beş sayı dört yeni aralık belirliyor. Bu dört aralığa, aralıkların uçlarının "toplam"larını yazalım:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0}$$

Bunu böylece sürdürelim. Bir sonraki aşamada

0/1, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 1/1, 4/3, 3/2, 5/3, 2/1, 5/2, 3/1, 4/1, 1/0

sayıları belirir.

Böyle devam ederek her kesirli sayıyı yalnız bir kez ve sadeleşmiş biçimde yazarız... Bunun bildiğim kanıtı uzun ama oldukça kolaydır. Bu yüzden kanıtını vermeyeceğim burada.

Şimdi kesirli sayıları Farey'in yukardaki açıkladığım yöntemle, beliriş sırasına göre sayın. Yalnız 1/0'ı atlamayı unutmayın, öyle bir sayı yoktur!