Gecikmiş Bir Teşekkür

Ali Nesin

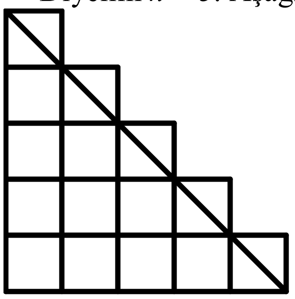
Aşağıdaki eşitliği daha önce Matematik ve Korku adlı kitabımın *Pisagor ve Sayılar* adlı yazısında kanıtlamıştım:

$$1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$$

Geometrik olarak bu eşitliği bir kez daha "kanıtlayayım". Ama önce eşitliği şöyle yazayım:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Diyelim $n = 5$. Aşağıdaki şekle bakalım.



Kaç tane kare var bu şekilde? $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ tane kare var. n'nin 5 olduğunu unutalım. Yukardaki şekilde $1 + 2 + ... + n$ tane kare var.

Öte yandan, üçgenin içinde $n^2/2$ tane kare var (kenarı n olan bir karenin yarısı) ve üçgenin hemen üstünde de $n/2$ tane kare var (n'nin yarısı.) Demek ki şekilde $n^2/2 + n/2$ tane kare var.

Yukardaki şeklin içindeki kare sayısını iki türlü hesapladık. İlk hesapta,

$$1 + 2 +... + n$$

bulduk, ikinci hesapta,

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

tane, yani $n(n+1)/2$ tane... Demek ki bu iki sayı birbirine eşitmiş! Kanıtımız bitmiştir.

Bu formül sayesinde $1 + 2 + ... + n$ sayısını kolaylıkla hesaplayabiliriz. Formülü kullanmazsak, $n - 1$ tane toplama yapmamız gerekir, ki bu da, eğer n büyük bir sayıysa, çok zaman alır. Ama $n(n+1)/2$ terimini hesaplamak için bir toplama (+ 1), bir çarpma ve bir bölme (2'ye) olmak üzere üç işlem yapmak yeterlidir. Örneğin 1'den 100'e kadar olan sayıların toplamak için 99 tane toplama işlemi yapmak yerine, 100(100+1)/2 terimini hesaplamak çok daha kolaydır:

$$\frac{100(100+1)}{2} = \frac{100\times 101}{2} = 5050$$

Hesapların kolaylaştığından kuşku yok.

İlk n sayının karelerinin toplamı kaçtır? Örneğin,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

sayısını bir çırpıda bulabilir miyiz? Eğer bu kolay geldiyse, ilk 20 sayının karelerinin toplamını bulmaya çalışın. Önce her sayının karesini alacaksınız, sonra bu kareleri toplayacaksınız... Tam 39 işlem yapmanız gerekecektir.

Karelerin toplamını bulmanın daha kolay bir yolu vardır. Aşağıdaki formülü kullanabiliriz:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bu formülle ilk 20 sayının karelerinin toplamını bir çırpıda bulabiliriz:

$$1^2 + 2^2 + ... + 20^2 = \frac{20(20+1)(40+1)}{6} = 2870.$$

Ergenliğe daha adımımı atmamıştım. Marmara kıyısında ailemle birlikte bir tatilköyündeydik. Herkes eğlenirken, koca tatilköyünde durmadan okuyup yazan iki kişi vardı: babam ve adını unuttuğum bir delikanlı. Delikanlı, yaşıtları gibi denize girmiyor, oyun oynamıyor, geceleri dans etmiyor ve kızlarla ilgilenmiyordu, en azından ilgilendiği belli olmuyordu. Durmadan yazıp çiziyordu, yazıp çizmekten yorulunca da kitap okuyordu. Delikanlının ne yaptığını merak ettim. Bir gün yanına gidip sordum. Matematik yapıyormuş. Bana anlattı yaptığını.

– Örneğin, dedi, ilk n sayının karelerinin toplamını veren bir formül bulabiliriz...

– Nasıl yani? diye sordum.

Yukarda verdiğim formülü yazdı kâğıda.

– Dene, dedi. Diyelim $n = 5$. İlk beş sayının karesini bul.

Buldum: 1, 4, 9, 16, 25.

– Topla şimdi.

Topladım: 55 çıktı.

– Şimdi, dedi, $n(n + 1)(2n + 1)/6$ teriminde n yerine 5 koy ve hesapla.

Hesapladım. 55 çıktı.

– Bak, aynı sayıyı buldun!

Şaşırdım. 6'yı denedim, 7'yi denedim, hep aynı sayıyı buldum. Bu, bana sihirbazlık gibi geldi. Gerçek sihirbazlık... Hilesiz çünkü. Sayılar arasında bu tür ilişkilerin olabileceğini daha önce hiç düşünmemiştim, kimse de söylememişti. Yepyeni bir evrene girmek üzere olduğumu anladım. Merakla,

– Formülü nasıl buldun? diye sordum.

– Anlatayım mı?

– Anlat!..

Çok heyecanlanmıştım. Anlatmaya başladı.

– Diyelim, dedi, yukardaki formülü bulmaya çalışıyoruz... Önce şöyle bir formül bulmaya çalışalım:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Bakalım böyle bir formül doğru olabilir mi?

Tam böyle mi açıkladı bilmiyorum elbet, aradan nerdeyse 30 yıl geçti. Ama buna benzer şeyler söylüyordu.

– a, b, c ve d'nin değerlerini şimdilik bilmiyoruz, bulmaya çalışacağız. Bak... Diyelim, $n = 1$. Eğer formül doğruysa, $1^2 = a+b+c+d$ olmalı. Öyle değil mi?

– Evet...

– Şimdi $n = 2$ olsun. Eğer formül doğruysa, $1^2 + 2^2 = 8a + 4b + 2c + d$ olmalı, öyle değil mi?

– Evet...

– Şimdi $n = 3$ olsun. Demek ki $1^2 + 2^2 + 3^2 = 27a + 9b + 3c + d$ eşitliği doğru olmalı...

– Evet...

– Şimdi de $n = 4$ olsun. Demek ki $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 64a + 16b + 4c + d$ eşitliği...

– Evet...

Eşitlikleri altalta yazdı:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 5 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & + & d & = & 14 \\ 64a & + & 16b & + & 4c & + & d & = & 30 \end{array}$$

– Şimdi a'yı, b'yi, c'yi ve d'yi bulabiliriz... Çünkü dört bilinmeyenli dört denklemimiz var...

Sonra gösterdi a, b, c ve d'nin nasıl bulunacağını. Birinci eşitliği öbür eşitliklerden çıkardı ve böylece d kayboldu:

$$\begin{aligned} 7a + 3b + c &= 4 \\ 26a + 8b + 2c &= 13 \\ 63a + 15b + 3c &= 29 \end{aligned}$$

– Şimdi üç bilinmeyenli üç denklemimiz var. d'yi yokettik. Şimdi de c'yi yokedelim.

$$\begin{aligned} 12a + 2b &= 5 \\ 42a + 6b &= 17 \end{aligned}$$

Önce birinci eşitliği ikiyle çarpıp ikinci eşitlikten çıkardı. Sonra birinci eşitliği üçle çarpıp üçüncü eşitlikten çıkardı:

– Bilinmeyen sayısı ikiye indi. Şimdi b'yi yokedelim. Birinci eşitliği üçle çarpıp ikincisinden çıkaralım: $6a = 2$, yani $a = 1/3$ buluruz…

Arkasından, yukardaki eşitliklerden birinde a yerine 1/3 koydu ve b'yi buldu. Diyelim $12a + 2b = 5$ eşitliğinde a yerine 1/3 koydu ve $4 + 2b = 5$ buldu. Bundan da $2b = 1$ ve $b = 1/2$ çıktı.

– b'yi de bulduk. şimdi c'yi bulalım... Yukardaki $7a + 3b + c = 4$ eşitliğinde $a = 1/3$ ve $b = 1/2$ olsun.

Hesapladı, $c = 1/6$ çıktı.

Çorap söküğü gibi gidiyordu çözümler. Şimdi sıra d'yi bulmaya gelmişti. Yukardaki $a + b + c + d = 1$ eşitliğinde, $a = 1/3$, $b = 1/2$ ve $c = 1/6$ aldı. Hesapladı ve $d = 0$ buldu.

– Hepsini bulduk... dedim biraz şaşkın.

– Evet bulduk, dedi ve bulduğumuz değerleri

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

formülüne yerleştirdi:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{3} + \frac{n}{6}$$

Bu formül, yukardaki formüle benzemiyor ama biraz basit cebirle,

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

formülüne dönüştürülebilir.

Çok hoşuma gitmişti.

– Hemen sevinme, dedi, nerden biliyorsun formülün doğru olduğunu?

– İlk dört sayı için doğru ya!

– Evet, dedi, formül $n = 1, 2, 3$ ve 4 için doğru… Ama her sayı için doğru mu bakalım?

– Haklısın, demek zorunda kaldım.

– Bakalım formül $n = 5$ için doğru mu?

Konuşmamızın başında formülün $n = 5$ için doğru olduğunu görmüştük.

– Evet! dedim. Formül $n = 5$ için de doğru…

– Demek ki, dedi, formül her sayı için doğru!

Burda bana yalan mı söyledi, yoksa kendisi de mi yanlış biliyordu, bilmiyorum. Dediği doğru değildi. Formülün $n = 5$ için doğru olması, her sayı için doğru olduğunu göstermez. Formülün $n = 6$ ve 7 için de doğru olduğunu bilmek yetmez. Bu aşamadan sonra, formülün doğru olduğunu bilmek için tümevarımla kanıt yapmak gerekir[1].

1 Formülün doğruluğu tümevarımla şöyle kanıtlanır: Eğer $n = 1$ ise formülün doğru olduğundan kuşkumuz yok. Şimdi, formülün n için doğru olduğunu varsayıp, $n + 1$ için doğru olduğunu kanıtlayın. Tümevarımla kanıt yöntemi **Matematik ve Oyun** adlı kitabımın *Sonsuz İniş ve Sonsuz Çıkış* adlı yazısında açıklanmıştır.

Bu yöntemle sayıların küplerinin toplamını veren bir formül bulduk. Küplerde ilginç bir eşitlik gözümüze çarptı:

$$1^3 = 1 = 1^2$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$$

Küplerin toplamı hep kare! Kolayca,

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

formülünü bulduk. Soldaki $n(n+ 1)/2$ terimi ilk n sayının toplamı olduğundan,

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$$

eşitliğini keşfetmiştik. İkimiz de şaşırdık bu işe. Bugün hâlâ daha şaşarım bu eşitliğe.

O gün ve daha sonraki günler birçok formül bulduk. Sabahtan akşama formül buluyorduk.

O delikanlı bana çok şey öğretti. Kimbilir nerelerde şimdi, ne yapıyor? Adı bile kalmamış belleğimde. Kendisine yüzyüze teşekkür etmek isterdim.