Eşkenar Üçgen Sorusu

Ali Nesin

Matematiksel araştırma yapmak çok kolaydır. Çünkü matematikte araştırma yapmak için kendi kendine bir soru sormak ve bu soru üzerinde düşünmek yeterlidir.

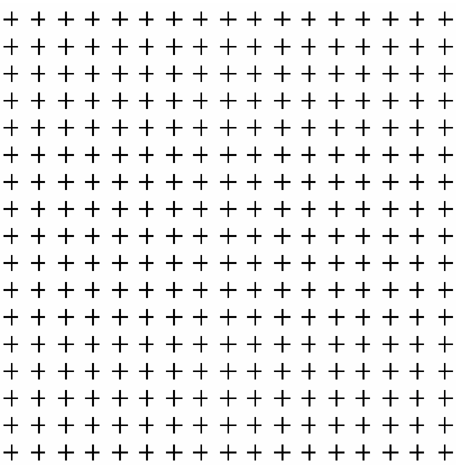
Araştırma yapmak, soruya yanıt vermek demek değildir. Araştırma yapmak, soru üzerinde düşünmek, sorunun derinliğini, zorluğunu anlamak, o soruya benzer sorular sormak demektir. Sorulan soruya yanıt verilirse de fena olmaz elbet, ama ille de yanıt vermek gerekmez.

Aşağıda soracağım soruyu bir ilkokul öğrencisinin kendi kendine soramaması için bir neden göremiyorum; soruyu yanıtlayamaması için bir neden görebiliyorum ama soramaması için bir neden göremiyorum.

Ben ilkokuldayken bu tür soruları sorabilir miydim kendi kendime? Hayır! Bugün düşünüyorum da, ilkokuldayken bu tür soruları kendi kendime neden soramadığımı bulamıyorum. Neyim eksikti? Belki de soru sormak öğretilmemişti bana. Oysa soru sormasını öğrenmek eğitimin en önemli öğesidir. Ne yazık ki öğrenciler okullarda soru sormayı değil yanıt vermeyi öğreniyorlar.

Çocukları bu tür soruları sorabilecek biçimde eğitebildiğimiz gün, yeryüzünün tüm ikincil sorunlarının ya çözüleceğine ya da ortadan kaybolacağına inanıyorum.

Bir ilkokul öğrencisinin bile kendi kendine sorabileceği soru şu: Her üç köşesinin de yandaki sonsuz düzlemin noktalarında olan bir eşkenar üçgen var mıdır?

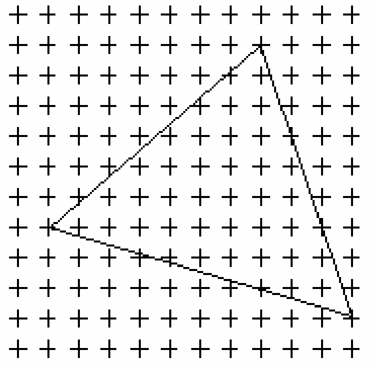


Varsa hangi üçgendir (köşeleri hangi noktalar üzerindedir), yoksa neden yoktur?

Düzlemin sonsuz olduğunu unutmayalım. Yani, "denedim, olmadı" gibi bir yanıt kabul edilemez. Ayrıca düşey ve yatay ardışık iki nokta arasındaki uzaklık hep aynıdır.

Düşünelim.

Öyle bir eşkenar üçgenin olduğunu varsayalım. Bir saçmalık, bir çelişki, bir çatışkı, bir paradoks (adını siz koyun!) elde edeceğiz ve böylece istediğimiz gibi bir üçgenin olmadığı kanıtlanmış olacak. Bu üçgenin noktalarından herhangi birine (0, 0) koordinatlarını atayalım. İkinci noktamızın koordinatlarına (x, y) diyelim, üçüncü nokta da (z, t). (Yanyana ya da altalta olan iki noktanın aralarındaki uzaklığı birim uzaklık olarak alıyoruz.)



Yukardaki x, y, z ve t kordinat sayılarının birer tamsayı olduklarını unutmayalım.

Eğer bu dört sayının herbiri çiftse, o zaman köşe noktaları (0, 0), ($x/2$, $y/2$) ve ($z/2$, $t/2$) noktalarından oluşan üçgen koşullarımıza uyan bir başka eşkenar üçgendir. Gerektiğinde ikiye bölerek, bu dört sayının herbirinin çift olmadığını, yani x, y, z ve t sayılarından en az birinin tek olduğunu varsayabiliriz. Bundan böyle bu varsayımı yapıyoruz.

Üç kenarın uzunluklarının karesi şöyledir:

$$x^2 + y^2$$
$$z^2 + t^2$$
$$(x - z)^2 + (y - t)^2$$

Üçgenimiz eşkenar olduğundan,

$$x^2 + y^2 = z^2 + t^2 \tag{1}$$

ve

$$x^2 + y^2 = (x - z)^2 + (y - t)^2 \tag{2}$$

eşitlikleri geçerlidir. İkinci eşitliği açıp sadeleştirsek,

$$z^2 + t^2 = 2xz + 2yt \tag{3}$$

eşitliğini buluruz. (3) eşitliğinin sağ tarafındaki sayı bir çift sayıdır, demek ki sol tarafındaki de çifttir. Dolayısıyla z ve t sayıları aynı çiftlikte olmalı, yani biri çiftse öbürü de çift olmalı, biri tekse öbürü de tek olmalı. (Yoksa sol taraftaki $z^2 + t^2$ bir çift sayı olamaz.)

Aynı şey x ve y sayıları için de geçerlidir elbet[1]: Ya her ikisi birden çifttir ya da her ikisi birden tek.

Bir an için z ve t'nin çift olduklarını varsayalım. O zaman x ve y tek olmak zorundalar. Demek ki x, y, z ve t sayılarını şöyle yazabiliriz:

$$x = 2x_1+1$$
$$y = 2y_1+1$$
$$z = 2z_1$$
$$t = 2t_1$$

(Burada x_1, y_1, z_1, t_1 tamsayılardır.) Bu eşitlikleri (1)'e taşıyalım:

$$(4x_1^2 + 4x_1 + 1) + (4y_1^2 + 4y_1 + 1) = 4z_1^2 + 4t_1^2$$

eşitliğini elde ederiz. Bu son eşitliğin sol tarafındaki sayı dörde bölündüğünde geriye 2 kalır, öte yandan sağ taraftaki sayı dörde bölündüğünde geriye 0 kalır. Bu bir çelişkidir. Demek ki varsayımımız yanlışmış, yani z ve t çift olamazlar, tek olmak zorundalar.

Aynen z ve t için yaptığımız gibi, x ve y'nin de tek olduklarını kanıtlayabiliriz. Demek ki x, y, z ve t sayıları tek sayılar. O zaman, bu dört sayıyı,

$$x = 2x_1 + 1$$
$$y = 2y_1 + 1$$
$$z = 2z_1 + 1$$
$$t = 2t_1 + 1$$

biçiminde yazabiliriz. Bu eşitlikleri (3)'e yerleştirelim ve hesaplayalım:

$$(4z_1^2 + 4z_1 + 1) + (4t_1^2 + 4t_1 + 1) = 2(2x_1 + 1)(2z_1 + 1) + 2(2y_1 + 1)(2t_1 + 1).$$

Soldaki sayı dörde verildiğinde 2 kalır, ama sağdaki sayı dörde tam olarak bölünür. Gene bir çelişki elde ettik. Demek ki öyle bir üçgen yokmuş.

[1] (x, y) ile (z, t) arasında bir ayrım yapmadık. (z, t) için kanıtladığımız her şeyi (x, y) için de kanıtlayabiliriz.

Şimdi araştırma yapmak istiyorsanız, bu sorudan esinlenerek kendi kendinize sorular sorup yanıtlamaya çalışabilirsiniz. Soracağınız sorular yukarda sorduğum soru kadar kolay olmayabilir, hatta belki de matematikte bugüne dek yanıtlanmamış bir soruyu kendinize sorabilirsiniz ayrımına varmadan, daha iyi! Zor sorularla uğraşmak, kolay sorularla uğraşmaktan daha eğlenceli, yani daha kolaydır!