Doğru Önermeler, Yanlış Önermeler[1]

Ali Nesin

Bu yazıda 6 mantık sorusu sorup yanıtlayacağız.

Birinci Bilmece. Yargıç karar verecek. Mahkeme tutanaklarından şu bilgiler çıkıyor:
Eğer *A* suçsuzsa, hem *B* hem *C* suçlu.
Ya *B* ya *C* suçsuz[2].
Ya *A* suçsuz ya *B* suçlu[3].
Kim ya da kimler suçlu, kim ya da kimler suçsuz?

İkinci Bilmece. Ayşe, Emin ve İhsan ayrı ayrı takımları tutuyorlar.
Eğer İhsan Beşiktaşlıysa, Emin Fenerbahçeli[4].
Eğer İhsan Fenerbahçeliyse, Emin Galatasaraylı.
Eğer Emin Beşiktaşlı değilse, Ayşe Fenerbahçeli.
Eğer Ayşe Galatasaraylıysa, İhsan Fenerbahçeli.
Ayşe'nin, Emin'in ve İhsan'ın tuttukları takımları bulun.

Üçüncü Bilmece. Aşağıdaki tümceleri Ateş'ten, Bülent' ten ve Can'dan duydum. Ben onların yalancısıyım.
Ateş, "ya Bülent ya Can yalancıdır," dedi.
Bülent, "Ateş yalancıdır," dedi.
Can, "hem Ateş hem Bülent yalancıdır," dedi.
Kim ya da kimler yalancı? (Ek: Yalancı hep yalan söyler!)

Dördüncü Bilmece. Altı çocuktan ikisi bir bahçeden elma aşırmış. Ama hangi ikisi? Çocuklar büyük bir günah işlemişler gibi sorguya çekilirler.
Hamdi çocuk, "Can'la Göksun çaldı," der.
Jale çocuk, "Dilek'le Tamer çaldı," der.
Dilek çocuk, "Tamer'le Can çaldı," der.
Göksun çocuk, "Hamdi'yle Can çaldı," der.
Can çocuk, "Dilek'le Jale çaldı," der.
Tamer çocuk bulunamamış. (Yoksa bir köşede elmaları mı yiyor?) Sorgulanan beş çocuktan dördü yaramazlardan birinin adını doğru vermiş, öbürünün adını yanlış vermiş. Beşinci çocuk her iki adı da yanlış vermiş. Elma aşıran iki yaramazı bulun.

Beşinci Bilmece. *A*, *B*, *C* diye adlandırılan üç nesnenin renkleri mavi, kırmızı ve yeşil. Aşağıdaki üç önermeden salt biri doğru:

A kırmızı

[1] Daha önceki basımlarda bu yazının adı "Doğru ve Yanlış Önermeler"di! Mantıkla ilgili bir yazıya böyle mantıksız bir başlık yakışmadığından, yazının adını değiştirdim.
[2] Bu önermeye göre hem *B* hem *C* suçsuz olabilir. Bundan sonraki önerme için de aynı şey geçerli.
[3] Hem *A* suçsuz hem *B* suçlu olabilir.
[4] Eğer İhsan Beşiktaşlı değilse, bu önerme bize bir şey öğretmiyor. Aynı şey bundan sonraki önermeler için de geçerli.

B kırmızı değil
C mavi değil

Nesneler ayrı renklerde olduklarına göre, her nesnenin rengini bulun.

Altıncı Bilmece. Ayşe, Bülent, Cevdet ve Derya aralarında satranç turnuvası yaparlar. Turnuva bittikten sonra,

Ayşe, “Cevdet kazandı, Bülent ikinci geldi,” der;
Bülent, “Cevdet ikinci, Derya üçuncü geldi,” der;
Cevdet, “Derya sonuncuydu, Ayşe ikinciydi,” der.

Her üç kişinin öne sürdüğü iki önermeden **salt** biri doğrudur. Örneğin Ayşe’nin öne sürdüğü

Cevdet kazandı

ve

Bülent ikinci geldi

önermelerinden yalnızca biri doğrudur, ikisi birden doğru olamaz. Dolayısıyla Ayşe’nin yanıtından, ya Cevdet’in birinci olduğunu ya da Bülent’in ikinci geldiğini biliyoruz. Bundan başka, ya Cevdet’in birinci gelmediğini ya da Bülent’in ikinci gelmediğini biliyoruz.

Turnuva sonucunda eşitlik olmadığına göre, turnuvanın sıralaması nasıldır?

Birinci Bilmecenin Yanıtı: Eğer *A* suçsuzsa, birinci önermeye göre hem *B* hem *C* suçludur. Ama bu sonuç ikinci önermeyle çelişiyor. Demek ki *A* suçlu. *A* suçlu olduğundan, üçüncü önermeye göre *B* suçlu. *B* suçlu olduğundan, ikinci önermeye göre *C* suçsuz.

Sonuç olarak, *A* ve *B*’nin suçlu, *C*’nin suçsuz olduğunu bulduk.

İkinci Bilmecenin Yanıtı: Önce mantıkta kullanılan “ise” sözcüğü üzerine bir iki söz söyleyelim.

Türkçede ve başka dillerde, *Pazar günü hava güzel olursa pikniğe gideceğiz* tümcesi, pazar günü hava güzel değilse pikniğe gidilmeyecek anlamını da taşır. Her ne denli tümce bunu açık açık söylemiyorsa da, bu anlam sezilir. Mantık ve matematikteyse, pazar günü hava güzel olmazsa pikniğe gidilip gidilmeyeceği bu tümceden anlaşılmaz. Konumuz matematik ve mantık olduğundan, örneğin, İhsan Beşiktaşlı değilse, birinci tümce bize bir bilgi vermez.

Şimdi bilmecemize dönelim.

Önce önermelerimizi simgelerle belirtelim. *EB*, “Emin Beşiktaşlı” önermesini simgelesin. *AG*, “Ayşe Galatasaraylı” önermesini simgelesin... Bildiklerimizi sıralayalım:

I ise
B *EF*
I ise
F *EG*
E değil
B se *AF*
A ise
G *EF*

Birinci önermeyi, yani “*IB* ise *EF*” önermesini ele alalım. Bu önerme, bize *IB* doğruysa, *EF*’nin de doğru olduğunu söylüyor. Ama, *IB* yanlışsa yeni bir bilgi vermiyor. Bunun gibi üçüncü önerme, *EB* yanlışsa *AF*’nin doğru olduğunu söylüyor; *EB* doğruysa üçüncü önerme bize yeni bir bilgi vermiyor.

Eğer *IB* doğruysa, *IB* = 1 yazalım; yanlışsa *IB* = 0 yazalım. Bunu her önerme için yapalım. Elde ettiğimiz yeni önermeleri yazalım:

$IB = 1$ ise $EF = 1$
$IF = 1$ ise $EG = 1$
$EB = 0$ ise $AF = 1$
$AG = 1$ ise $EF = 1$

Başka ne biliyoruz? Herbirinin ayrı ayrı takımları tuttuğunu biliyoruz. Demek ki, örneğin Emin Fenerbahçeliyse, Ayşe ve İhsan Fenerbahçeli olamazlar; yani $EF = 1$ ise $AF = IF = 0$ olmalı. Bunun tersi de doğrudur: $AF = IF = 0$ ise, $EF = 1$'dir (biri Fenerbahçeli olmalı!) Ayrıca, bir kişi iki takımı birden tutamayacağından, örneğin $EF = 1$ ise $EB = EG = 0$ olmalı. Bunun da tersi doğrudur: $EB = EG = 0$ ise, $EF = 1$ olmalı (Emin bir takımı tutmalı!)

Sonuçlarımızı yandaki tabloda göstereceğiz.

	B	F	G

Yandaki tablonun boş karelerine 0 (yanlış) ve 1 (doğru) koyacağız. Her kolonda ve her sırada yalnızca bir tane 1 olması gerektiğini biliyoruz.

Eğer $EF = 1$ ise, $EB = 0$'dır. $EB = 0$ eşitliğinden ve üçüncü önermeden AF = 1 çıkar. Ama hem EF hem AF doğru olamaz. Demek ki $EF = 0$ olmalı.

Eğer $IB = 1$ ise, birinci önermeden $EF = 1$ eşitliği çıkar, ki bunun doğru olmadığını yukarda görmüştük. Demek ki $IB = 0$.

Eğer $AG = 1$ ise, dördüncü önermeden, $EF = 1$ çıkar, ki bunun doğru olmadığını görmüştük. Demek ki $AG = 0$.

Bu bulduğumuz üç sonucu tablomuzda gösterelim:

	B	F	G
A			0
E		0	
I	0		

$IF = 1$ eşitliğini varsayalım. İkinci eşitliğe göre, $EG = 1$'dir. $EG = 1$ olduğundan, $EB = 0$ olmalı. $EB = 0$ olduğundan, üçüncü eşitliğe göre, $AF = 1$ olmalı. Ama hem AF hem IF doğru olamaz. Demek ki $IF = 0$.

Sonuç olarak, $IB = EF = AG = IF = 0$ eşitliklerini kanıtladık. Şimdi, yukardaki tabloyu – her kolona ve sıraya bir 1 gelecek biçimde – bir türlü tamamlayabiliriz: $IB = IF = 0$ eşitliğini biliyoruz. Demek ki $IG = 1$ olmalı (İhsan bir takım tutmak zorunda!) $EF \times İF = 0$ olduğuna göre, $AF = 1$ olmalı (biri Fenerbahçeyi tutmalı!) $AF = 1$ olduğundan, $AB = 0$ olmalı. $AB = IB = 0$ olduğundan, $EB = 1$ olmalı (biri Beşiktaşlı olmalı!)

	B	F	G
	0	1	0
	1	0	0
	0	0	1

Sonuç olarak,

Ayşe Fenerbahçeli
Emin Beşiktaşlı
İhsan Galatasaraylı

dır.

Üçüncü Bilmecenin Yanıtı: Ateş, Bülent ve Can yerine A, B ve C simgelerini kullanacağız. "A yalancı" önermesini $A = 0$ olarak, "A yalancı değil" önermesini de $A = 1$ olarak gösterelim. Aynı şeyi B ve C için de yapalım. Şimdi A, B ve C'nin dediklerini matematikçeye çevirelim.

Önce A'nın dediğini ele alalım. A, "ya B ya C yalancıdır," diyor. Yani "ya $B = 0$ ya $C = 0$'dır," diyor. Demek ki, A yalancı değilse (yani $A = 1$ ise), "ya $B = 0$ ya $C = 0$" önermesi doğrudur. Demek ki, "$A = 1$ ise ya $B = 0$ ya $C = 0$" önermesi doğrudur. Öte yandan, $A = 0$ ise, yani A yalancıysa, “ya $B = 0$ ya $C = 0$” önermesi doğru olamaz (çünkü A yalan söylüyordur); dolayısıyla $B = C = 1$ eşitlikleri doğrudur. Sonuç olarak, A’nın dediklerinden,

$$A = 1 \text{ ise ya } B = 0 \text{ ya } C = 0$$

ve

$$A = 0 \text{ ise } B = C = 1$$

önermeleri çıkar.

Aynı şeyi B ve C için yapacak olursak, bilmecemiz biraz daha matematikselleşir. İşte bilmecenin bize verdiği bilgilerin matematikçesi:

1. $A = 1$ ise ya $B = 0$ ya $C = 0$
2. $B = 1$ ise $A = 0$
3. $C = 1$ ise $A = B = 0$
4. $A = 0$ ise $B = C = 1$
5. $B = 0$ ise $A = 1$
6. $C = 0$ ise ya $A = 1$ ya $B = 1$

$A = 0$ eşitliğini varsayalım. (4)’e göre $B = C = 1$ olmalı. $C = 1$ olduğundan, (3)’e göre $B = 0$ olmalı. B, hem sıfıra hem bire eşit olamayacağından bir çelişki elde ederiz. Demek ki $A = 1$ olmalı.

$A = 1$ olduğundan, (2)’den B’nin 1 olamayacağı çıkar. Demek ki $B = 0$.

$A = 1$ olduğundan, (3)’ten C’nin 1 olamayacağı çıkar. Demek ki $C = 0$.

Sonuç olarak B ve C yalancıdır, A yalancı değildir.

Dikkat edilirse son iki bilgiyi kullanmadık.

Dördüncü Bilmecenin Yanıtı: Çocukların adlarını C, D, G, H, J, T harfleriyle simgeleyelim. Elmayı C aşırmışsa $C = 1$ yazalım, yoksa $C = 0$ yazalım. Bunu her çocuk için yapalım. Çocuklardan ikisinin elma aşırdığını biliyoruz. Demek ki,

$$C + D + G + H + J + T = 2 \qquad (*)$$

eşitliğini biliyoruz.

Başka ne biliyoruz? Çocuklardan dördünün çalanlardan birinin adını doğru, öbürünün adını yanlış verdiğini ve beşinci çocuğun her iki adı da yanlış verdiğini biliyoruz. Demek ki, verilen adların değerlerinin toplamı 4 olmalı, yani

$$(C + G) + (D + T) + (T + C) + (H + C) + (D + J) = 4$$

olmalı. Bu eşitlikten,

$$3C + 2T + 2D + G + H + J = 4 \qquad (**)$$

eşitliği çıkar. (*) eşitliğini, (**)’dan çıkarırsak,

$$2C + T + D = 2 \qquad (***)$$

eşitliğini buluruz. C, T ve D’nin değeri 0 ve 1 olduğundan, (***) eşitliği iki şıkkın olabileceğini gösterir: Ya $C = 0$ ve $T = D = 1$ eşitlikleri doğrudur, ya da $C = 1$ ve $T = D = 0$ eşitlikleri.

Birinci şık, Jale’nin dediğinden olanaksızdır. Demek ki ikinci şıktayız: $C = 1$ ve $T = D = 0$. Hamdi ve Göksun’un dediklerinden ve $C = 1$ eşitliğinden $G = 0$ ve $H = 0$ eşitlikleri çıkar. Geriye Jale kalır. Demek ki elmaları Jale ve Can aşırmış.

Beşinci Bilmecenin Yanıtı: A kırmızıysa, ikinci önerme yanlış olmalı, yani B de kırmızı olmalı. Demek ki A kırmızı olamaz. Dolayısıyla birinci önerme yanlıştır.

B kırmızı değilse – A kırmızı olmadığından – C kırmızı olmalı. Ama o zaman da ikinci ve üçüncü önermeler doğru olur. Oysa önermelerden yalnızca birinin doğru olduğunu biliyoruz. Demek ki B kırmızı olmalı. Dolayısıyla ikinci önerme de yanlıştır.

İlk iki önerme yanlış olduğundan üçuncü önerme doğrudur. Yani C mavi değildir. Bu bilgilerden kolaylıkla A'nın mavi, B'nin kırmızı ve C'nin yeşil olduğu çıkar.

Altıncı Bilmecenin Yanıtı: Ayşe'nin dediklerini ele alalım. a_1, "Cevdet kazandı" önermesinin doğruluk değeri olsun. Yani, Cevdet turnuvayı gerçekten kazanmışsa, $a_1 = 1$ olsun. Yoksa $a_1 = 0$ olsun. a_2, "Bülent ikinci geldi" önermesinin doğruluk değeri olsun. Ayşe'nin dediklerinden yalnızca biri doğru olduğundan, ya a_1 ya a_2 birdir. Ama ikisi birden bir olamaz. Yani,

$$a_1 + a_2 - 2a_1a_2 = 1 \tag{1}$$

eşitliği geçerlidir. (Bu eşitlik, ancak ve ancak a_1 ve a_2 sayılarından biri 1 olduğunda doğrudur. Eğer her iki sayı birden 1 ya da biri 0'sa yanlıştır.) Aslında (1) eşitliğine gereksinmeyeceğiz. a_1 ve a_2'den yalnızca ve yalnızca birinin 1 olduğunu bilmek bizim için yeterli olacak.

Aynı biçimde, b_1, b_2, c_1, c_2, Bülent ve Cevdet'in sırasıyla öne sürdükleri önermelerin doğruluk değerlerini simgelesinler. Yukardaki gibi akıl yürüterek,

$$b_1 + b_2 - 2b_1b_2 = 1 \tag{2}$$

ve

$$c_1 + c_2 - 2c_1c_2 = 1 \tag{3}$$

eşitliklerini buluruz.

Daha başka ne biliyoruz? Cevdet hem birinci hem ikinci olamayacağından, ya a_1 ya da b_1 sıfır olmalı (ikisi birden de sıfır olabilir.) Demek ki,

$$a_1b_1 = 0. \tag{4}$$

Buna benzer bir nedenden,

$$b_2c_1 = 0 \tag{5}$$

eşitliği geçerlidir.

Daha bitmedi. Hem Bülent hem Cevdet ikinci olamayacağından,

$$a_2b_1 = 0 \tag{6}$$

eşitliğini biliyoruz. Buna benzer nedenlerden,

$$a_2c_2 = 0 \tag{7}$$

ve

$$b_1c_2 = 0 \tag{8}$$

eşitliklerini de biliyoruz.

Bu sekiz eşitlikten a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 sayılarını bulacağız.

(4) eşitliğini ele alalım. Bu eşitliğe göre ya a_1 ya da b_1 sıfır olmalı.

Önce b_1'in sıfır olmadığını varsayalım. Demek ki $b_1 = 1$. (4) ve (6)'ya göre $a_1 = a_2 = 0$. Ama bu (1)'le çelişiyor. Demek ki b_1 sıfır olmalı.

$b_1 = 0$ eşitliğini bulduk. Bu eşitlikten ve (2)'den $b_2 = 1$ çıkar. Bu son eşitlikten ve (5)'ten $c_1 = 0$ eşitliği çıkar. Bu son eşitlikten ve (3)'ten $c_2 = 1$ eşitliği çıkar. Bu son eşitlikten ve (7)'den $a_2 = 0$ eşitliği çıkar. Bu son eşitlikten ve (1)'den $a_1 = 1$ eşitliğini buluruz. Demek ki $a_1 = b_2 = c_2 = 1$. Dolayısıyla, turnuvanın sıralaması şöyle:

1. Cevdet
2. Ayşe
3. Derya
4. Bülent

Sonucu bulmak için (8) eşitliğini kullanmadığımıza dikkatinizi çekerim.