Develerle Eşekler

Ali Nesin

MATEMATİĞE GİRİŞ

Matematik 101 dersindesiniz, ilk dersiniz, birinci gününüz... Hiç matematik bilmediğinizi varsayıyor hocanız... Kümelerden başlayacaksınız matematiğe... İlk dersiniz olduğundan daha önce hiç küme görmediğiniz varsayılıyor.

Nedir küme? Tanımsız bir nesnedir... Tanımlayamayız. Bir kümenin öğeleri (elemanları) olabilir, bir tek bunu biliyorsunuz küme hakkında. Bir kümenin olup olmadığını bile bilmiyorsunuz.

Hocanız tahtaya hiç öğesi olmayan bir kümenin olduğunu yazıyor:

Birinci Belit (Aksiyom). *Hiç öğesi olmayan* (*en az*) *bir küme vardır.*

Bundan böyle bu kararı kabul edeceksiniz: Hiç öğesi olmayan bir küme vardır!

Başka kümelerin olup olmadığını bilmiyorsunuz ama, hiç olmazsa hiç öğesi olmayan bir kümenin olduğunu (artık) biliyorsunuz, hocanız söyledi!

Hiç öğesi olmayan bir küme örneği mi istiyorsunuz? İşte: Sınıfınızdaki develer bir küme oluşturuyorsa, bu kümenin büyük bir olasılıkla hiç öğesi yoktur.

Tavuklar kümesinden de söz edebilirdik!

Ya da inekler kümesinden (mecazi anlamda değil!)

Hiç öğesi olmayan birkaç küme olabilir... Neden olmasın? Örneğin, sınıfınızdaki develer kümesiyle sınıfınızdaki eşekler kümesinin öğeleri yoktur. Bu iki küme birbirine eşit midir? Daha doğrusu eşit olmalı mıdır?

Bir öğrenci,

– Bence eşit olmamalı, diyebilir, ne de olsa biri develer kümesi, öbürü eşekler kümesi... Öğeleri farklı...

Beriki,

– Evet ama, diyebilir, bu eşekler kümesi eşeksiz, develer kümesi de devesiz... Eşeksiz eşekler kümesi elbette devesiz develer kümesine eşit olmalı...

– Olmamalı...

– Olmalı...

– Ne yani bu sınıftaki her eşek bir deve mi? (Kahkahalar)

Öğrenciler iki gruba ayrılabilirler: Hiç öğesi olmayan bir tek kümenin var olmasını isteyenler ve hiç öğesi olmayan birçok değişik kümenin var olabileceğini savunanlar.

Sınıfın en aklıevveli, belki de hoca, hiç öğesi olmayan bir tek kümenin olduğunu kanıtlamaya kalkışabilir:

– A ve B hiç öğesi olmayan iki küme olsun... A'nın B'ye eşit olduğunu kanıtlamak istiyoruz... Nasıl yapacağız?

O anda sınıftan biri,

– Ama, diyebilir, biz iki kümenin ne zaman birbirine eşit olduğunu bilmiyoruz ki...

– Evet, diyebilir bir diğeri, A'nın B'ye eşit olduğunu (ya da olmadığını) kanıtlamak için, her şeyden önce A'nın B'ye eşit olmasının ne demek olduğunu bilmeliyiz...

– Bu konuda bir karar alınmadı, tahtaya belit yazılmadı...
– Evet alınmadı...
– Sadece hiç öğesi olmayan bir kümenin varlığını belirten bir karar aldık... Eşitlik konusuna hiç değinmedik...
– Aynı öğeleri olan kümeler birbirine eşit olsun... diyebilir içinizden biri, belki de siz atarsınız bu güzel fikri...
Hocanız bu kararı kabul edip tahtaya ikinci kararı yazar:

İkinci Belit. *Aynı öğeleri olan iki küme birbirine eşittir.*

Yani A kümesinin her öğesi B kümesinin bir öğesiyse ve B kümesinin her öğesi A kümesinin bir öğesiyse, o zaman A kümesi B kümesine eşit olur. Bu bir karardır. Böyle olacak!
Şimdi hocanız hiç öğesi olmayan bir tek kümenin olduğunu kanıtlayabilir. Şöyle kanıtlar:
– Anımsarsanız, hiç öğesi olmayan iki küme almıştım. Bu iki kümenin birbirine eşit olduğunu kanıtlamak istiyordum... Kümelerimize A ve B adlarını vermiştik...
Heyecanla kanıtın devamını bekliyorsunuzdur. Hocanız sözlerine devam eder:
– Bir anlık gafletle, diyelim ki A kümesi B kümesine eşit değil... O zaman ne olur?
– Ne olur? diye sorarsınız merakla.
– Ne olacak, ya A'da olup da B'de olmayan ya da B'de olup da A'da olmayan bir öğe vardır... İkinci karara (belite) göre öyle olması gerekir... Evet... Eğer bu iki küme birbirine eşit değilse, ikisinden birinde öbüründe olmayan bir öğe vardır...
– Eeee?.. diye sorabilir bir öğrenci.
– Eeee'si mi var! İki kümenin birinde, öbüründe olmayan bir öğe olacak... diye yanıtlar hoca.
– Eeeee?
– Duymadınız galiba!..
– Duydum, duydum... İki kümenin birinde öbüründe olmayan bir öğe olacak...
– Böyle saçma şey olur mu?
– Nesi saçma ki bunun?
– Dedik ya.... İki kümenin birinde bir öğe olacak...
– Aaaa!
– Aaaa ya!.. Bu kümelerin öğeleri yok... Dolayısıyla, birinde olup da öbüründe olmayan bir öğe olamaz...
– Demek ki iki küme birbirine eşit olmak zorundalar...
– Evet öyle...
– Yani bu odadaki her eşek aslında bir devedir...
– Evet... Neyse ki odada eşek yok...

Madem hiç öğesi olmayan bir tek küme var, bu kümeye bir ad verelim: **Boşküme**!

Ertesi derste hocanız tahtaya bir teorem yazar, bu ikinci teoreminizdir.

Teorem. *Boşkümenin her öğesi* $\sqrt{2}$*'ye eşittir*[1].

---

[1] $\sqrt{2}$ her ne ise...

Herkes güler.

– Saçma...

– Deli saçması...

gibi sözlerle öğrenciler karşı çıkarlar.

– Nasıl doğru olabilir ki, diye sorar biri, boşkümenin hiç öğesi yok ki $\sqrt{2}$'ye eşit olsun!

Bir başkası arkadaşını destekler:

– Doğru... Boşkümenin $\sqrt{2}$'ye eşit olacak hiç öğesi yok...

Hoca,

– Doğru söylüyorsunuz... Boşkümenin $\sqrt{2}$'ye eşit olacak öğesi yok. Ama $\sqrt{2}$'ye eşit olmayacak da hiç öğesi yok...

Hoca sözlerine devam eder:

– Bir an için diyelim dediğim yanlış: Varsayalım ki boşkümenin her öğesi $\sqrt{2}$'ye eşit değil. O zaman, boşkümede $\sqrt{2}$'ye eşit olmayan bir öğe olmalı... Ama boşkümede hiç öğe yok ki, boşkümede $\sqrt{2}$'ye eşit olmayan bir öğe olsun! Varsayımımdan bir saçmalık elde ettim. Demek ki boşkümenin her öğesi $\sqrt{2}$'ye eşit...

– Ben inanmıyorum, diyebilir bir öğrenci, aynı akıl yürütmeyle boşkümenin her öğesinin $\sqrt{3}$'e eşit olduğunu da kanıtlayabiliriz. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$'e eşit olmadığından, bu kanıt doğru olamaz.

O zaman hocanız şöyle yanıtlar kuşkucu öğrenciyi:

– Evet, boşkümenin her öğesi $\sqrt{3}$'e de eşittir, ama bundan $\sqrt{2}$'nin $\sqrt{3}$'e eşit olduğu çıkmaz... Çünkü boşkümenin hiç öğesi yok... Eğer boşkümenin bir öğesi olsaydı, o öğe hem $\sqrt{2}$'ye hem de $\sqrt{3}$'e eşit olacağından, $\sqrt{2} = \sqrt{3}$ eşitliğini elde ederdik... Neyse ki boşkümede hiç öğe yok...

"Boşküme" sözcüğünü yazması uzun olduğundan, boşkümeyi yazıda kısaca $\varnothing$ olarak gösterilir.

Öğrenciler artık bir küme olduğunu biliyorlar, ama yalnızca bir tek küme olduğunu biliyorlar: Boşküme. Boşkümeden başka küme var mı? Yoksa yaratmak gerekir...

Hiç öğesi olmayan kümeden bir tane olduğundan, yaratacağımız yeni kümelerin öğeleri olmalı... Ne olmalı bu öğeler? Elimizde hiç öğe yok ki... Yoksa önce öğe mi yaratmalıyız? Belki de... Daha iyi bir fikir, geçmişte yarattığımız kümeleri öğe olarak kullanmaktır. Bir kümenin öğeleri de küme olsunlar... Eski kümeleri öğe olarak kullanarak yeni kümeler yaratalım... Elimizde şimdilik bir tek küme olduğundan, öğe olarak şimdilik sadece boşkümeden yararlanabiliriz. Demek ki yaratacağımız ikinci kümenin bir tek öğesi olabilir: Boşküme. Tek öğesi olan ve bu tek öğenin boşküme olduğu bir küme yaratalım. Ama daha önce bunu mümkün kılan bir kural koyalım.

Üçüncü Belit. *Eğer x bir kümeyse, öğe olarak sadece ve sadece x'i içeren bir küme vardır.*

Bu yeni küme $\{x\}$ olarak gösterilir.

x bu kümenin bir öğesidir ve bu kümenin başka öğesi yoktur.

Demek ki, bu kararla alınan kümelerin en az bir öğesi var: x; yani bu kararla elde edilen kümeler boşküme olamazlar.

Bu sayede şu kümeler var olur:

$$\varnothing$$
$$\{\varnothing\}$$

$\{\{\varnothing\}\}$
$\{\{\{\varnothing\}\}\}$
$\{\{\{\{\varnothing\}\}\}\}$
....

Böylece birbirinden değişik sonsuz tane yeni küme elde edebiliriz. Ancak, şimdilik elde edeceğimiz her kümenin ya sıfır ya da bir öğesi olabilir. İki ya da üç öğeli bir kümenin varlığını gösteremeyiz.

Üç öğeli kümeleri elde etmek için yeni bir kurala ihtiyacımız var:

Dördüncü Belit. *Eğer x ve y birer kümeyse, öğe olarak sadece ve sadece x'in ve y'nin öğelerini içeren bir küme vardır.*

Bu kümeye "x bileşim y" adı verilir ve kısaca $x \cup y$ olarak yazılır..

Örnek:

$\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
$\{\{\varnothing\}\} \cup \{\{\{\{\varnothing\}\}\}\} = \{\{\varnothing\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}\}$
$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}\}$.

Ve böylece üç öğeli kümeler, hatta dört öğeli kümeler, hatta hatta, sonlu olmak koşuluyla, dilediğimiz kadar öğesi olan kümeler elde edebiliriz. Örneğin, aynı kuralı peşpeşe dört kez uygulayarak,

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \{\{\{\{\varnothing\}\}\}\}\}$$

beş öğeli bir küme elde edebiliriz[2].

SAYILAR

Daha 0, 1, 2, 3, 4 gibi sayılarımız yok. Unutmayın ki Matematik 101 dersindeyiz. Sayıları bulmalıyız.

Göreceğimiz üzere, 0, 1, 2, 3 gibi sayıların matematiksel tanımlarının, günlük hayattaki tanımlarıyla neredeyse hiçbir ilgisi olmayacak. Örneğin, 2 + 2 = 4 eşitliğini kanıtlamak için, ilkokulda yapıldığı gibi, iki elmaya iki elma daha eklemeyeceğiz, matematiksel tanımlardan yola çıkacağız, 2'nin, 4'ün ve toplamanın tanımından...

Önce sıfırı (0) tanımlayalım:

$$0 = \varnothing. \tag{0}$$

Bu tanıma göre 0 bir kümedir (boşkümedir.)

0'dan sonra gelen sayıyı $\{0\}$ kümesi olarak tanımlayalım ve bu sayıya 0^+ ya da 1 adını verelim:

$$0^+ = 1 = \{0\}. \tag{1}$$

1'den sonra gelen sayıyı $\{0, 1\}$ kümesi olarak tanımlayalım ve bu sayıya 1^+ ya da 2 adını verelim:

$$1^+ = 2 = \{0, 1\}. \tag{2}$$

2'den sonra gelen sayıyı $\{0, 1, 2\}$ kümesi olarak tanımlayalım ve bu sayıya 2^+ ya da 3 adını verelim:

$$2^+ = 3 = \{0, 1, 2\}. \tag{3}$$

3'ten sonra gelen sayıyı $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesi olarak tanımlayalım ve bu sayıya 3^+ ya da 4 adını verelim:

---

[2] Bu dört kuralla elde edilen her küme sonludur. Sonsuz kümeyi var etmek için başka bir karar almalı.

$$3^+ = 4 = \{0, 1, 2, 3\}. \qquad (4)$$

Şimdi şu eşitliklere bakalım:

$$4 = 3^+ =^4 \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} =^3 3 \cup \{3\}$$
$$3 = 2^+ =^3 \{0, 1, 2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} =^2 2 \cup \{2\}$$
$$2 = 1^+ =^2 \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\} =^1 1 \cup \{1\}$$
$$1 = 0^+ =^1 \{0\} = \varnothing \cup \{0\} =^0 0 \cup \{0\}$$

Böylece, hem tanımladığımız bu sayıların birer küme olduklarını kanıtlarız, hem de bu sayıların,

$$n^+ = n \cup \{n\}$$

eşitliğini sağladığını görürüz. Tanımlanmış her n sayısından "bir sonraki" sayıya n^+ diyelim ve bu sayıyı,

$$n^+ = n \cup \{n\} \qquad (n)$$

olarak tanımlayalım.

Bu sayede, 4'ten sonra gelen sayıları da buluruz:

$$4^+ =^n 4 \cup \{4\} =^4 \{0, 1, 2, 3\} \cup \{4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Bu sayıyı 5 olarak göstereceğiz elbet.

Ve 5'ten sonra gelen sayı:

$$5^+ =^n 5 \cup \{5\} =^4 \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

TOPLAMA

Sayıları tanımladık. Şimdi sayıları toplamasını öğrenelim.

Tanımla başlıyorum. n ve m birer sayı olsunlar.

$$n + 0 = n \qquad (+0)$$
$$n + m^+ = (n + m)^+ \qquad (+)$$

Eğer tanımlar yerinde tanımlarsa, iki artı ikinin dört olması, yani 2 + 2 = 4 eşitliğinin bir teorem olması gerekir... Hatta $n^+ = n + 1$ olması gerekir. Bunu hemen kanıtlayalım:

$$n + 1 = n + 0^+ = (n + 0)^+ = n^+$$

İşte kanıtladık!

Teorem. 2 + 2 = 4.

Kanıt: Önce 2 + 1 = 3 eşitliğini kanıtlayalım:

$$2 + 1 = 2 + 0^+ =^+ (2 + 0)^+ =^{+0} 2^+ = 3.$$

Şimdi, bu eşitliği kullanarak 2 + 2 = 4 eşitliğini kanıtlayabiliriz:

$$2 + 2 = 2 + 1^+ =^+ (2 + 1)^+ = 3^+ = 4.$$

Yukardaki tanımlardan yola çıkarak, her n için $0 + n = n$ eşitliğini de kanıtlayabiliriz. Örneğin 0 + 5 = 5 eşitliğini... Hatta hatta 0 + 1000 = 1000 eşitliğini...

Yukardaki (+0) tanımında, $0 + n = n$ denmiyor, $n + 0 = n$ deniyor. Ve biz, $n + m = m + n$ eşitliğini bilmediğimizden, (+0) tanımından $0 + n = n$ eşitliğini çıkaramıyoruz. Bu eşitlik için biraz uğraşmak gerekir.

Teorem. $0 + n = n$.

Kanıt: Bu eşitliği "n üzerinden tümevarımla" kanıtlayacağız; yani eşitliği önce $n = 0$ için kanıtlayacağız, daha sonra, eşitliğin n için geçerli olduğunu varsayıp, aynı eşitliğin n'den sonra gelen ilk sayı olan n^+ için de geçerli olduğunu kanıtlayacağız. Bir başka deyişle tümevarımla kanıt iki aşamada yapılır[3]:

Birinci Aşama: Önce $0 + 0 = 0$ eşitliğini kanıtla.

İkinci Aşama: Daha sonra, $0 + n = n$ eşitliğini doğru kabul edip, $0 + n^+ = n^+$ eşitliğini kanıtla.

Birinci aşama (+0) tanımında verilmiş zaten. İkinci aşamayı kanıtlayalım:

$$0 + n^+ =^+ (0 + n)^+ = n^+$$

Yukardaki birinci eşitlik (+) tanımından, ikinci eşitlik de "$0 + n = n$" varsayımımızdan çıkıyor. Teoremimiz kanıtlanmıştır.

Teorem. $n + m = m + n$.

Kanıt: Bu teoremi de tümevarımla kanıtlayacağız. İster n üzerinden, ister m üzerinden... Biz, m üzerinden tümevarım yapalım. Yani, teoremi önce $m = 0$ için kanıtlayalım (birinci aşama.) Arkasından, teoremin m için doğru olduğunu varsayıp, aynı teoremi m^+ için kanıtlayalım (İkinci Aşama.)

Birinci Aşama: $n + 0 = 0 + n$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Birinci terim (+0) tanımına göre n'ye eşit. İkinci terim de yukardaki teoreme göre n'ye eşit. Demek ki bu iki terim birbirine eşit[4].

İkinci Aşama: $n + m = m + n$ eşitliğini varsayıp, $n + m^+ = m^+ + n$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Başlayalım:

$$n + m^+ =^+ (n + m)^+ = (m + n)^+ =^+ m + n^+ = ...$$

Birinci eşitlik toplamanın tanımından çıkıyor. İkinci eşitlik varsayım. Üçüncü eşitlik gene toplamanın tanımından çıkıyor. Devamını getiremedik... Takıldık...

Ama daha önce $m + n^+ = m^+ + n$ eşitliğini kanıtlamış olsaydık sorun kalmazdı. Demek ki bu teoremden önce $m + n^+ = m^+ + n$ eşitliğini kanıtlamamız gerekiyordu. Kanıtlayalım:

Önsav. $m + n^+ = m^+ + n$.

Önsavın Kanıtı: Kanıtı n üzerine tümevarımla yapacağız. Önce $n = 0$ için, yani $m + 0^+ = m^+ + 0$ eşitliğini, kanıtlamalıyız:

$$m + 0^+ =^+ (m + 0)^+ =^{+0} m^+ =^{+0} m^+ + 0$$

ve önsav $n = 0$ için kanıtlanmış oldu.

Şimdi, önsavın n için geçerli olduğunu varsayıp, önsavı n^+ için geçerli olduğunu, kanıtlamalıyız. Yani $m + n^+ = m^+ + n$ eşitliğini varsayıp, $m + n^{++} = m^+ + n^+$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Kanıtlıyoruz:

$$m + n^{++} =^+ (m + n^+)^+ = (m^+ + n)^+ =^+ m^+ + n^+$$

İkinci eşitlik tümevarım varsayımımızdan kaynaklanmaktadır.

Böylece önsavımız kanıtlanmış oldu.

Şimdi teoremimizi, kaldığımız yere yukardaki önsavın eşitliğini yerleştirerek kanıtlayabiliriz:

$$n + m^+ =^+ (n + m)^+ = (m + n)^+ =^+ m + n^+ = m^+ + n.$$

ÇARPMA

Sıra çarpmaya geldi. Çarpmayı şöyle tanımlayalım:

$$n \times 0 = 0 \qquad (\times 0)$$

$$n \times m^+ = n \times m + n \qquad (\times)$$

---

[3] Doğal sayılar kümesinin tanımını verseydik, tümevarımla kanıtın neden geçerli olduğunu da kanıtlayabilirdik. Daha doğrusu, doğal sayılar kümesinin tanımı, tümevarımla kanıtın geçerli olabilecek biçimde verilmiştir. Ama, konuyu zorlaştırmamak için tümevarımla kanıtın neden geçerli olduğunu burada kanıtlamayacağız.

[4] Aslında, görüldüğü gibi $n + 0$ ve $0 + n$ terimleri birbirine eşit değildir. Sadece bu terimlerin değerleri birbirine eşittir!

Teorem. $2 \times 2 = 4$

Kanıt: Bu kanıtı birkaç basamakta gerçekleştireceğiz.

Önce $2 \times 1 = 2$ eşitliğini kanıtlayalım:

$$2 \times 1 = 2 \times 0^+ =^{\times} 2 \times 0 + 2 =^{\times 0} 0 + 2 = 2.$$

Burada, birinci eşitlik 1'in tanımından ileri gelmektedir. Sonuncu eşitlik de bir üstteki Toplama bölümünde kanıtlanmıştı.

Şimdi $2 \times 2 = 4$ eşitliğini kanıtlayabiliriz:

$$2 \times 2 = 2 \times 1^+ =^{\times} 2 \times 1 + 2 = 2 + 2 = 4.$$

Burada, birinci eşitlik 2'nin ve çarpmanın tanımından ileri gelmektedir. Sondan bir önceki eşitlik kanıtımızın başında kanıtlanmıştır. Sonuncu eşitlik Toplama bölümünde kanıtlanmıştı.

Dileyen okur,

$$n \times m = m \times n$$
$$n + (m + p) = (n + m) + p$$
$$n \times m = m \times n$$
$$n \times (m \times p) = (n \times m) \times p,$$
$$n \times (m + p) = n \times m + n \times p$$

gibi bilinen eşitlikleri kanıtlayabilir.