Çıkarma ve Kare Alma Altında Kapalı Kümeler

Ali Nesin

Doğal sayılar kümesi **N**, yani {0, 1, 2, 3, 4, ...} kümesi, toplama ve çarpma işlemleri altında kapalıdır; bir başka deyişle, iki doğal sayıyı toplarsak ya da çarparsak gene bir doğal sayı buluruz. Öte yandan doğal sayılar kümesi çıkarma altında kapalı değildir, örneğin $3-5$ işleminin sonucu bu kümede değildir.

Tamsayılar kümesi **Z** = { ..., −2, −1, 0, 1, 2,... } toplama, çarpma ve çıkarma altında kapalıdır, ama bölme altında kapalı değildir. Örneğin 3'ü 5'e bölme işleminin sonucu bu kümede değildir.

Kesirli sayılar kümesi **Q** ve gerçel (reel) sayılar kümesi **R**, toplama, çarpma, çıkarma ve bölme altında kapalıdır[1].

Bu yazıda sayı kümelerinin çeşitli işlemler altında kapalı altkümelerini bulacağız.

1. $A \subseteq \mathbf{R}$ bir gerçel sayılar kümesi olsun. Eğer A kümesi çıkarma altında kapalıysa, bir başka deyişle,

$$\text{her } x, y \in A \text{ için, } x - y \in A \text{ ise,}$$

o zaman A kümesi toplama altında da kapalıdır, yani,

$$\text{her } x, y \in A \text{ için, } x + y \in A$$

tümcesi doğrudur. Çünkü,

$$x + y = x - ((x - x) - y)$$

eşitliği doğrudur. Bir başka deyişle, toplamayı çıkarma cinsinden yazabiliriz. Yine bir başka deyişle, sadece çıkarma yapmasını bilen bir makina, bilgisayar, aygıt, alet, hatta insan, toplama yapmasını da biliyordur.

Öte yandan çıkarmayı toplama cinsinden yazamayız. Örneğin, doğal sayılar kümesi **N**, yani,

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5,\ldots\}$$

kümesi toplama altında kapalıdır, ama çıkarma altında kapalı değildir.

2. Eğer A kümesi çıkarma, kare alma ve ikiye bölme altında kapalıysa, yani,

a) Her $x, y \in A$ için, $x - y \in A$ ise,

b) Her $x \in A$ için, $x^2 \in A$ ise, ve

c) Her $x \in A$ için, $x/2 \in A$ ise,

o zaman, A kümesi çarpma altında da kapalıdır, çünkü,

$$xy = \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2}$$

eşitliği geçerlidir. (Birinci sorudan A'nın toplama altında kapalı olduğunu biliyoruz.) Yani sadece çıkarma, kare alma ve 2'ye bölmeyi bilen bir makina, toplama ve çarpmayı da biliyordur.

3. Eğer A kümesi çıkarma ve kare alma altında kapalıysa ve 1/2 sayısını içeriyorsa, yani,

a) Her $x, y \in A$ için, $x - y \in A$ ise,

b) Her $x \in A$ için, $x^2 \in A$ ise, ve

c) $1/2 \in A$ ise,

---

[1] Tek koşulla: Bir sayıyı 0'a bölemeyiz.

o zaman, A kümesi çarpma altında da kapalıdır, çünkü, $1/4 = (1/2)^2$ sayısı A'dadır ve

$$x/2 = (x + 1/4)^2 - x^2 - (1/4)^2$$

eşitliğinden, eğer $x \in A$ ise, $x/2$'nin de A'da olduğu anlaşılır. Böylece, ikinci sorudan A'nın çarpma altında kapalı olduğu anlaşılır.

4. Eğer A kümesi çıkarma ve kare alma altında kapalıysa, A kümesi çarpma altında da kapalı mıdır?

Yanıt olumsuz. Yani çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ama çarpma altında kapalı olmayan bir gerçel sayı kümesi vardır.

İkinci ve üçüncü sorudan da belli ki, böyle bir gerçel sayı kümesi ikiye bölme altında kapalı değildir ve 1/2'yi içeremez.

Şimdi çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ama çarpma altında kapalı olmayan bir gerçel sayı kümesi kümesi bulalım.

π, bildiğimiz pi sayısı olsun. π, π^2, π^3, π^4 .... sayılarını tamsayılarla çarpıp toplayalım. Yani, $a_i \in \mathbf{Z}$ için,

$$a_1\pi + a_2\pi^2 + a_2\pi^2 + ... + a_n\pi^n$$

türünden yazılan sayılar kümesine bakalım. Örneğin,

$$\pi,$$
$$-5\pi,$$
$$2\pi^3$$
$$\pi - 4\pi^2 + 3\pi^3 + 7\pi^5$$

bu tür sayılardandır. Bu tür sayılardan oluşan kümeye A diyelim:

$$A = \{ a_1\pi + a_2\pi^2 + ... + a_n\pi^n : n \in \mathbf{N}, a_i \in \mathbf{Z} \}$$

Bu küme çıkarma ve kare alma altında kapalı ve 1/2'yi içermiyor[2]. Ama A ne yazık ki çarpma altında da kapalı. Yani A, aradığımız küme değil.

Şimdi A'daki elemanların karelerine bakalım:

$$(a_1\pi + a_2\pi^2 + ... + a_n\pi^n)^2 = a_1^2\pi^2 + 2a_1a_2\pi^3 + ... + a_n^2\pi^{2n}.$$

Görüldüğü gibi, karelerde, π^3'ün önünde bulunan sayı, yani π^3'ün katsayısı her zaman çift bir tamsayı. Şimdi, A'daki sayılardan π^3'ün katsayısı çift olanları bir kümede toplayalım:

$$B = \{a_1\pi + a_2\pi^2 + 2a_3\pi^3 + a_4\pi^4 + ... + a_n\pi^n : n \in \mathbf{N}, a_i \in \mathbf{Z} \}$$

Örneğin,

$$\pi \in B$$
$$-5\pi \in B$$
$$\pi^2 \in B$$
$$\pi^4 \in B$$
$$2\pi^3 \in B$$
$$\pi - 4\pi^2 + 7\pi^5 \in B$$
$$\pi - 4\pi^2 + 2\pi^3 + 7\pi^5 \in B$$

(İlk dört sayıda π^3'ün katsayısı 0, ki 0 çift bir sayıdır.) Ama

$$\pi^3 \notin B$$
$$-5\pi + \pi^3 \notin B$$
$$\pi + 7\pi^3 \notin B$$
$$\pi - 4\pi^2 - 3\pi^3 + 7\pi^5 \notin B$$

---

[2] Bu kümenin 1/2'yi içermemesi, kanıtı oldukça zor bir teoremdir. Biraz ilerde bu teoremden sözedeceğiz.

Kolaylıkla görüleceği üzere B kümesi çıkarma ve kare alma altında kapalıdır. Ama çarpma altında kapalı değildir, örneğin π ve π^2 sayıları B kümesindedir, ama bu iki sayının çarpımı olan π^3 sayısı B kümesinde değildir.

Yukarda, π^3'ün B'de olmadığını söyledik. Bu doğru mu? Evet. Ama kanıtı hiç de kolay değildir. Bunu kanıtlamak için matematikte geçen yüzyıl kanıtlanan ve bugün artık çok bilinen şu teoreme ihtiyaç vardır:

Teorem. π sayısı cebirsel değildir, yani eğer

$$a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \ ... + a_n\pi^n = 0$$

ise ve her a_i bir tamsayıysa, o zaman her a_i sıfıra eşittir.

Sonuç: Eğer $a_i \in \mathbf{Z}$ ise ve a_3 tekse, $a_1\pi + a_2\pi^2 + \ ... + a_n\pi^n \notin B$.

Sonucun Kanıtı: Sonucun doğru olmadığını varsayıp bir çelişki elde edeceğiz.

Diyelim, sonucun tersini söyleyen bir örnek var: a_3 tek bir tamsayı olsun, ama $a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \ ... + a_n\pi^n$ sayısı B'de olsun. O zaman bu sayıyı

$$b_1\pi + b_2\pi^2 + 2b_3\pi^3 + ... + b_m\pi^m$$

olarak yazabiliriz ($b_i \in \mathbf{Z}$). Demek ki,

$$a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \ ... + a_n\pi^n = b_1\pi + b_2\pi^2 + 2b_3\pi^3 + ... + b_m\pi^m$$

Gerekirse, sağdaki ya da soldaki terimin sonuna $0\pi^k$ türünden (sıfıra eşit) sayılar ekleyerek $n = m$ eşitliğini varsayabiliriz:

$$a_1\pi + a_2\pi^2 + \ ... + a_k\pi^k = b_1\pi + b_2\pi^2 + 2b_3\pi^3 + ... + b_k\pi^k$$

Şimdi sağdaki sayıyı soldaki sayıdan çıkaralım:

$$(a_1 - b_1)\pi + (a_2 - b_2)\pi^2 + (a_3 - 2b_3)\pi^3 + ... + (a_k - b_k)\pi^k = 0.$$

Yukardaki teoreme göre bu son eşitliğin bütün katsayıları sıfır olmalı, Ama $a_3 - 2b_3$ sıfır olamaz, neden derseniz, a_3 tek, $2b_3$ çift... Bir çelişki elde ettik ve sonucumuzu kanıtladık.

π yerine, yukardaki teoremi doğrulayan başka sayılar da alabilirdik. Örneğin, $\pi - 1$, π^2, e (logaritmanın Neper sabiti) gibi. Ama π yerine $\sqrt{2}$ alamazdık. Çünkü $\sqrt{2}$ cebirsel bir sayıdır: $2 - (\sqrt{2})^2 = 0$.

5. Yukardaki B kümesi kesirli sayılardan oluşmuyor, yani $\mathbf{Q}$ sayılar kümesinin bir altkümesi değil, çünkü π kesirli bir sayı değildir. Çıkarma ve kare alma altında kapalı, ama çarpma altında kapalı olmayan ve kesirli sayılardan oluşan bir küme var mıdır?

Yoktur!

Çıkarma ve kare alma altında kapalı bir kesirli sayılar kümesi çarpma altında da kapalıdır. Bunu kanıtlayalım.

A çıkarma ve kare altında kapalı bir kesirli sayılar kümesi olsun. u ve v kesirli sayılarının A'da olduklarını varsayalım. uv'nin A'da oldugunu kanıtlayacağız.

$u = a/b$ ve $v = c/d$ olarak yazalım. (Burada a, b, c ve d birer tamsayı). e tamsayısı, ad ve bc tamsayılarının en büyük ortak böleni olsun, yani $e = \text{ebob}(ad, bc)$. e, ad'yi böldüğünden,

$$u = a/b = (e/bd)(ad/e) \in (e/bd)\mathbf{Z}.$$

Aynı nedenden, yani e, bc'yi böldüğünden,

$$v = c/d = (e/bd)(bc/e) \in (e/bd)\mathbf{Z}.$$

Demek ki $uv \in (e^2/b^2d^2)\mathbf{Z}$. Dolayısıyla, uv'nin A'da olduğunu kanıtlamak için, e^2/b^2d^2 sayısının A'da olduğunu kanıtlamak yeterli. e^2/b^2d^2 sayısının A'da olduğunu kanıtlamak için de e/bd sayısının A'da olduğunu kanıtlamak yeterli. Kanıtlayalım.

e = ebob(ad, bc) olduğundan, öyle x ve y tamsayıları vardır ki, $adx + bcy = e$ eşitliği doğrudur. Demek ki,

$$e/bd = (adx + bcy)/bd = (a/b)x + (c/d)y \in A.$$

İstediğimizi kanıtladık.

6. Bilim aşkına, bilmek aşkına, daha doğrusu soru sormak aşkına (bilmek kimin umurunda!) soru sormaya devam edelim. Yanıtı bulmak önemli, önemsiz değil, ama soruyu sormak da önemli, hatta soruyu sormak yanıtı bulmaktan daha da önemli. Soru sormadan yanıt bulunur mu!? Önce soru, sonra yanıt.

Matematik eğitimin başat eksikliği budur: Matematik eğitimi yanıt bulmaya yöneliktir, soru sormaya değil. Oysa doğru soru sorabilmek için daha çok çalışmak, daha çok düşünmek gerekir ve doğru soru sormak doğru yanıtı bulmaktan daha eğlencelidir.

Şimdi şu tür sayılara bakalım:

$$\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Q}\}.$$

Burada **Q**, kesirli sayılar kümesini simgeliyor. Bu küme matematikte $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ olarak gösterilir. $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ kümesi, çıkarma, toplama, çarpma altında kapalıdır. Hatta bölme altında da kapalıdır. Sadece 0'a bölemeyiz. Bu kümenin birkaç öğesini yazalım:

$$\frac{3}{5} - \frac{7}{4}\sqrt{2},\ 1 + \sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 5,\ -3,\ 1/\sqrt{2}...$$

Son sayı bu kümede çünkü,

$$1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,.$$

$\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ kümesinin, çıkarma ve kare alma işlemleri altında kapalı, ama çarpma işlemi altında kapalı olmayan bir altkümesi var mı? Varsa hangisi, yoksa neden yok?

Bu tür soruları çoğaltabiliriz elbet. Örneğin aynı soruyu $\mathbf{Q}[\sqrt{3}]$ kümesi için de sorabiliriz. Soru sormaktan kolay (zor!) ne var!

Yanıtı şu anda bilmediğimi itiraf ediyorum.