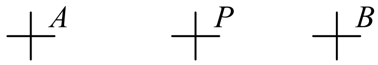
Cetvelsiz de Olur!

Ali Nesin

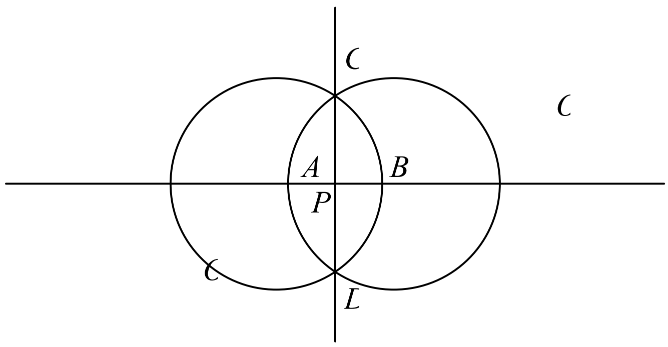
Eski Yunan matematikçileri cetvel ve pergel yardımıyla yapılan çizimler çok ilgilendirirdi. Çünkü Eflatun'a göre, doğru ve daire, geometrik şekiller arasında mükemmel olan tek şekillerdi. "Mükemmel" ne demekse…

Bir örnek verelim. İki noktanın tam ortasındaki noktayı cetvel ve pergelle bulalım. A ve B noktaları verilmiş olsun. Bu iki noktanın tam ortasındaki P noktasını pergel ve cetvelle bulacağız.



Pergel ve cetvelle P noktasını bulma yöntemi şöyle (Aşağıdaki şekilden izleyin):

1. AB doğrusunu cetvelle çizelim.
2. A merkezli AB yarıçaplı bir daire çizelim. Bu daireye O adını verelim.
3. Sonra B merkezli AB yarıçaplı ikinci bir daire çizelim. Bu daireye O_1 adını verelim.
4. Bu iki dairenin kesiştiği noktalara C ve D diyelim.
5. CD doğrusunu çizelim.
6. CD doğrusuyla AB doğrusunun kesiştiği nokta, bulmak istediğimiz P noktasıdır.



"Benim daha kolay bir yöntemim var: Cetvelle A ve B arasındaki mesafeyi ölçerim, yarısını alıp P noktasını bulurum," derseniz, yanlış olur; çünkü cetvelimiz ölçmeye değil, verilmiş iki noktadan geçen doğruyu çizmeye yarayan bir cetveldir. Yani cetvel derecelendirilmemiş, üstünde hiç yazı ya da işaret bulunmayan dümdüz bir cetvel…

Eski Yunanlılar pergel ve cetvel kullanarak birçok çizim yapmışlardır. Örneğin düzgün üçgen (yani eşkenar üçgen), düzgün dörtgen (yani kare), düzgün beşgen, düzgün altıgen ve düzgün 15-gen çizmesini biliyorlardı. Ayrıca, eğer düzgün bir n−gen verilmişse, düzgün $2n$-gen çizebiliyorlardı. Düzgün yedigen ve 17-gen yapmayı bilmiyorlardı. Düzgün yedigen cetvel ve pergelle çizilemez, bunu Gauss kanıtladı. 30 Mart 1796'da 19 yaşındaki Gauss düzgün 17-geni pergel ve cetvelle çizmeyi başardı[1].

---

[1] Gauss şu teoremi de kanıtlamıştır: Düzgün bir n−genin cetvel ve pergelle çizilebilmesi için $2^{2^k}+1$ biçiminde yazılabilen sonlu tane $p_1, \ldots, p_s$ asal sayısı için ve bir r tamsayısı için, $n = 2^r p_1 \ldots p_s$ eşitliğinin geçerli olması gerekli

Eski Yunanlıların yapamadıkları başka çizimler de vardı.

1. Bir açıyı üç eşit parçaya bölemiyorlardı. Bazı açılar üçe bölünebilir, örneğin 90, 135, 180, 270 derecelik açılar pergel ve cetvelle üçe bölünebilir, ama Yunanlılar her açıyı üçe bölmesini bilmiyorlardı. Örneğin 60 derecelik açıyı üçe bölemiyorlardı[2].

2. Alanı verilmiş bir dairenin alanına eşit bir kare çizemiyorlardı[3].

3. Birim uzunluk verilmişse, $\sqrt{3;2}$ uzunluğunu çizemiyorlardı.

Matematikçiler yüzyıllar boyunca yukardaki çizimleri yapmaya çalıştılar. Daireyle doğru mükemmel olduklarına göre, cetvel ve pergelle her çizimin yapılabileceğine inanıyorlardı. Bu çizimlerin imkânsız oldukları 18. yüzyılda anlaşıldı[4]. Anlaşıldı ama, hâlâ daha bu çizimleri yapmaya çalışan amatörler vardır. Boşu boşuna… Bu çizimlerin yapılamayacağı matematiksel olarak kanıtlanmıştır.

Geçen yıl İspanya'da bir konferansta, bir arkadaşım, pergel ve cetvelle elde edilebilecek her noktanın aslında yalnızca pergelle elde edilebileceğini söyledi. Bu bir teoremmiş ama kanıtını bilmiyormuş. Ben de bilmiyorum[5]. Ama, Özlem Beyarslan'la uğraştık ve yalnızca pergel kullanarak iki noktanın orta noktasını bulmayı başardık.

Buraya, Sahir Karakaya, Dr. Zekeriya Güney ve Dr. Tanju Ertunç'un çözümlerini aktaracağım.

A. Önce, AB doğrusu üstünde, $|AB| = |BE|$ eşitliğini sağlayan bir E noktası bulalım:

1) B merkezli, $|AB|$ yarıçaplı daireyi çizelim. Bu daireye X_1 diyelim.
2) A merkezli, $|AB|$ yarıçaplı daireyi çizelim. Bu daireye X_2 diyelim.
3) Bu iki dairenin iki kesişiminden herhangi birine C adını verelim.
4) C merkezli, $|CB|$ yarıçaplı daireyi çizelim. Bu daireye X_3 diyelim.
5) X_1 ile X_3'ün A olmayan kesişim noktasına D diyelim.
6) D merkezli, $|DB|$ yarıçaplı daireyi çizelim. Bu daireye X_4 diyelim.
7) X_1 ile X_4'ün C olmayan kesişim noktasına E diyelim.

Bu E noktası dilediğimiz noktadır. Bunun kanıtını okura bırakıyorum.

---

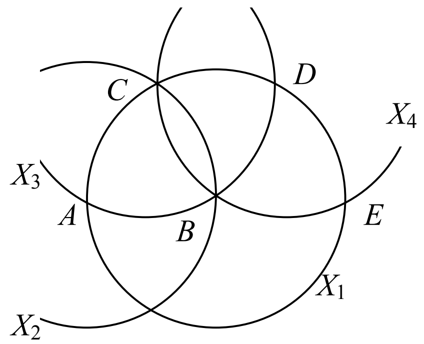
ve yeterlidir. Örneğin düzgün 257 çizilebilir, çünkü 257 asaldır ve 2^{2^3} + 1'e eşittir. 2^{2^k} + 1 biçiminde yazılan asal sayılara Fermat asalları denir. Hangi k'lar için 2^{2^k} + 1 sayısının asal olduğu bugün hâlâ bilinmiyor. Bu konuda *Matematik ve Korku* adlı kitabımdaki *Asal Sayılar* adlı yazıya bakabilirsiniz.

[2] Bir açıyı 2, 4, 8… eşit parçaya bölmek kolaydır. Bir doğru parçasını da cetvel ve pergelle istediğimiz kadar eşit parçaya bölebiliriz. Eğer cetvel derecelendirilmişse, her açı üçe bölünebilir (H.M. Cundy ve A.P. Rollette, **Mathematical Models**, Oxford University Press, 1961).

[3] Arşimet, çok akıllı (ama başarısız) bir yöntemle böyle bir kare ararken, $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$ eşitsizliklerini kanıtlamıştır.

[4] Bu imkânsızlıkları kanıtlamak için biraz modern cebir (daha doğrusu cisimler kuramı) bilmek yeterlidir. Matematik bölümlerinde, ikinci ya da üçüncü yılda kanıtlanır bu teorem genellikle. Dileyen, Ian Stewart'ın **Galois Theory** adlı kitabından kanıtları okuyabilir.

[5] Sonradan öğrendiğime göre, bu teoremi 1672'de Mohr kanıtlamış ve teorem daha çok Mascheroni (1797) teoremi diye biliniyormuş.



B. Şimdi, AB'nin orta noktasını bulacağız. Yukardaki şekilden yalnızca E'yi aklımızda tutalım. Aşağıdaki şekilden izleyin:

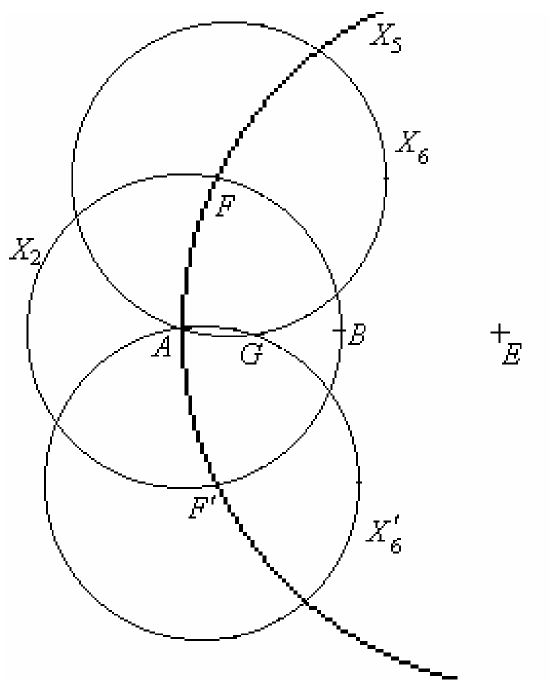
1) A merkezli, $|AB|$ yarıçaplı daireyi çizelim. Bu daireye (yukardaki gibi) X_2 diyelim.

2) E merkezli, $|EA|$ yarıçaplı daireyi çizelim. Bu daireye X_5 diyelim.

3) X_2'yle X_5'in kesiştiği iki noktaya F ve F' diyelim.

4) F ve F' merkezli, $|FA|$ ve $|F'A|$ yarıçaplı daireleri çizelim. Bu dairelere X_6 ve X_6' diyelim.

5) X_6' ve X_6 daireleri iki noktada kesişirler. Bunlardan biri A noktasıdır. Öbür noktaya G diyelim.



G noktası, AB doğru parçasının orta noktasıdır. Bunu kanıtlayalım.

AEF ve *AFG* üçgenlerine bakalım. Her ikisi ikizkenar üçgendir ve ortak açıları vardır (*FAB* açısı.) Dolayısıyla bu iki üçgen benzer üçgenlerdir ve Tales teoremini uygulayabiliriz. Bu olguya $|AB| = |AF|$ eşitliğini katarsak dilediğimizi kanıtlarız. Ayrıntıları okura bırakıyorum.