Çemberin Çevresi, Dairenin Alanı, π'nin Değeri

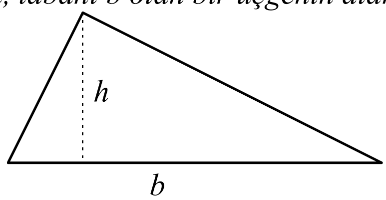
Ali Nesin

Bu yazıda, r yarıçaplı bir çemberin çevresinin neden $2\pi r$, alanının neden πr^2 olduğunu göreceğiz. İlkokuldan beri ezberletilen bu formüllerin kanıtlarını merak etmemiş olabilirsiniz. Ne yazık ki okullarda – salt Türkiye'de değil, dünyanın hemen hemen her yerinde ve özellikle matematik derslerinde – öğrenciler sorgulamaya teşvik edilmezler. Öğretmenin dediği kabul edilir.

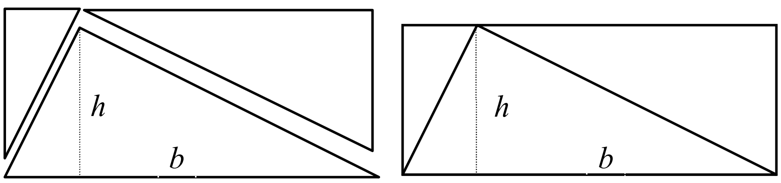
Yazının ortalarında $3 < \pi$ eşitsizliğini kanıtlayacağım. Hemen, "çok kolay" deyip kaleme kâğıda sarılmayın. $3 < \pi$ eşitsizliğini kanıtlamak için π'nin tanımını bilmek gerekir. π'nin tanımını biliyor musunuz? Sanmıyorum. Okullarda pek öğretilmez. Bu eşitsizliği kanıtlamak için okullarda öğretilen $\pi = 3{,}14$ yada $\pi = 22/7$ gibi (doğru olmayan) bilgiler kullanılmamalıdır[1]. Yazının 8. bölümünde π'nin tanımını vereceğim. O tanım okunduktan sonra $3 < \pi$ eşitsizliği kanıtlanmalıdır, daha önce değil.

Çok basit matematikten başlayacağız. Önce ünlü Pisagor ve Tales teoremlerini kanıtlayacağız. Bu biraz zaman alacak. Bu yüzden, Pisagor ve Tales teoremlerini ve kanıtlarını bilen okur, dilerse, doğrudan beşinci bölüme gidebilir.

1. Üçgenin Alanı: *Yüksekliği h, tabanı b olan bir üçgenin alanı bh/2'dir.*



Bu formülü bilmeyen lise fen bölümü öğrencileri tanıdım ne yazık ki. Öte yandan, geçenlerde gittiğim özel bir ilkokulun beşinci sınıf öğrencileri hem formülü hem de kanıtını biliyorlardı. Sevindim elbet. Ama eğitimdeki eşitsizliği bir kez daha görüp üzüldüm de. İlkokul öğrencilerinin anlayabileceği bu kanıt bir şekille açıklanabilir.

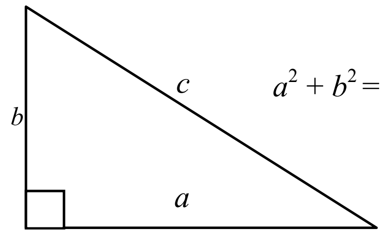


Üçgeni yukardaki şekillerdeki gibi "ikiyle çarpalım." Böylece, yüksekliği h, tabanı b olan bir dikdörtgen elde ederiz. Dikdörtgenin alanı bh olduğundan[2], üçgenin alanı $bh/2$'dir.

1 Okullarda, genellikle π'nin 3,14'e eşit olduğu öğretilir. Bu doğru değildir. π sayısı aşağı yukarı 3,14'tür. Tam 3,14 değildir. Örneğin π sayısı 3,14159'a daha yakındır. π sayısı, 3,14159 diye başlar ama sonsuza dek, hiç yinelenmeden sürer gider. Bunu kanıtlayabilmek için önce π'nin tanımını bilmek gerekir. Tanımı bilinmeyen bir sayının değeri de bilinemez elbette. Tanımlandıktan sonra bile π›nin değerini bulmak kolay değildir.

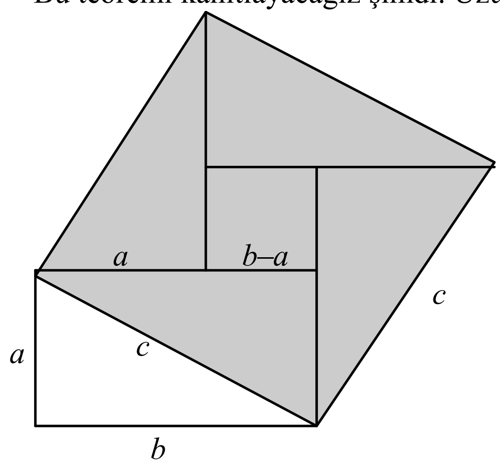
22 Kenarları b ve h olan bir dikdörtgenin alanının bh olduğunu bir belit (aksiyom) olarak ya da alan kavramının tanımının bir parçası olarak kabul edin, öyledir.

2. Pisagor Teoremi. Pisagor teoremi, *Bir diküçgenin dik açısının kenarlarının uzunluklarının karelerinin toplamı öbür kenarın uzunluğunun karesine eşittir*, der. Şekille söylemek gerekirse,



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bu teoremi kanıtlayacağız şimdi. Uzunluğu c olan kenara bir kare inşa edelim:



Yamuk duran karenin bir kenarının uzunluğu c'dir, demek ki alanı c^2'dir. Şimdi aynı alanı başka türlü hesaplayacağız.

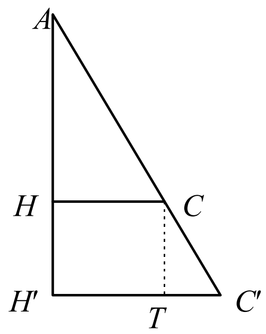
Karede dört üçgen var ve herbirinin alanı ilk üçgenimizin alanına eşit, yani her üçgenin alanı $ab/2$. Yamuk karenin içinde bu dört üçgenden başka, bir de küçük kare var. Bu küçük karenin her kenarı $b - a$ olduğundan alanı $(b - a)^2$'dir. Demek ki yamuk karenin alanı aynı zamanda bu alanların toplamına eşittir:

Dört üçgenin alanı	$4 \times ab/2$	:	$2ab$
Küçük karenin alanı	$(b - a)^2$	:	$b^2 - 2ab + a^2$
Toplam alan			$a^2 + b^2$

Dolayısıyla $c^2 = a^2 + b^2$ eşitliği geçerlidir. Pisagor teoremini de kanıtladık.

Sıra Tales teoremini kanıtlamaya geldi. Tales'in teoremini iki aşamada kanıtlayacağız.

3. Tales'in Teoremi (1): *Aşağıdaki şekilde $HC/H'C' = AH/AH'$ eşitliği geçerlidir.*



$AH'C'$ üçgeninin alanını iki türlü hesaplayacağız.

Bu alan, her şeyden önce, $AH' \times H'C'/2$'ye eşittir.

Aynı zamanda AHC üçgenininin, $HCTH'$ dikdörtgeninin ve CTC' üçgeninin alanına eşittir, yani,

$$AH \times HC/2 + HC \times HH' + CT \times TC'/2$$

ye eşittir. Demek ki,

$$AH' \times H'C'/2 = AH \times HC/2 + HC \times HH' + CT \times C'T/2$$

eşitliği doğru. Bu eşitlikte,

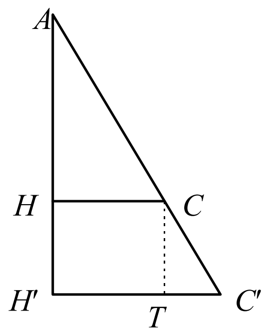
HH' yerine $AH' - AH$,

CT yerine $AH' - AH$,

$C'T$ yerine $H'C' - HC$

koyalım, çarpıp sadeleştirelim, istediğimiz eşitliği elde ederiz.

4. Tales’in Teoremi (2): *Aşağıdaki şekilde $AC/HC = AC'/H'C'$ eşitliği geçerlidir.*



Yukardaki teoremi ve Pisagor teoremini kullanacağız:

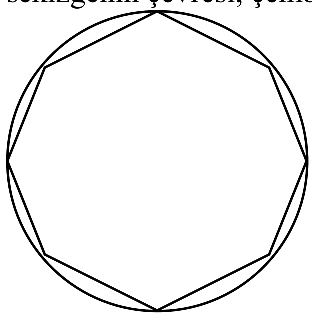
$AC^2 =^{(\text{Pisagor})} AH^2 + HC^2 =^{(\text{Tales 1})} (AH'^2 \times HC^2/H'C'^2) + HC^2$

$=^{(\text{cebir})} (HC^2/H'C'^2)(AH'^2 + H'C'^2)$

$=^{(\text{Pisagor})} (HC^2/H'C'^2) \times AC'^2$.

Şimdi iki tarafın da karekökünü alarak dilediğimiz eşitliği kanıtlayabiliriz[3].

5. Düzgün Çokgenler. Bir çembere düzgün çokgenlerle yakınsayabiliriz. Örneğin, çemberin içine yerleştirilen bir düzgün sekizgenin çevresi, çemberin çevresine oldukça yakındır.



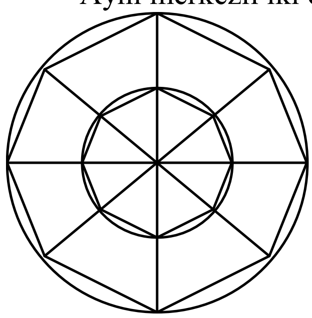
Eğer çemberin içine bir düzgün onaltıgen yerleştirirsek, çembere daha da yaklaşmış oluruz.

Çokgenin kenar sayısını ne kadar çok artırırsak, çembere o kadar çok yakınsarız. Çokgenin çevresi, çemberin çevresinden her zaman daha küçüktür, ama aradaki fark kenar sayısı arttıkça küçülür, öyle ki “sonsuzda” bu iki çevre birbirlerine eşit olurlar. Bir başka deyişle, çember, bir düzgün sonsuzgendir.

Aynı şey çemberin içerdiği alan, ki ona “daire” denir, için de geçerlidir. Düzgün çokgenin alanı, kenar sayısı arttıkça, dairenin alanına yakınsar ve “sonsuzda” iki alan birbirine eşit olur.

6. π’nin Tanımı. Pek yakında r yarıçaplı bir çemberin çevresinin $2\pi r$ olduğunu kanıtlayacağız. Bir an için bunu bildiğimizi varsayarsak, bir çemberin çevresi yarıçapına böldündüğünde 2π elde edildiğini görürüz. Bu, bütün çemberler için geçerlidir. Yani herhangi bir çemberi yarıçapına bölersek, hep aynı sayıyı, bir sabiti (2π’yi) elde ederiz. Bunu kanıtlayalım. Kanıttan hemen sonra π sayısını tanımlayacağız.

Aynı merkezli iki çember ele alalım. Bu çemberlerin içine düzgün çokgenler oturtalım:

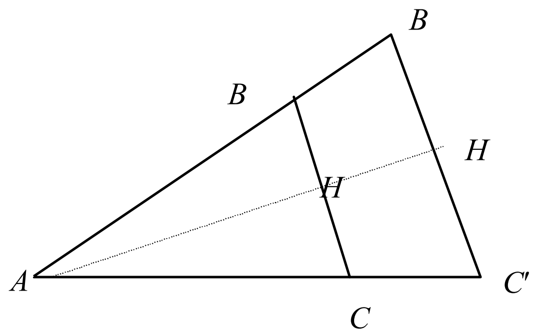


Çokgenlerin kenar sayısına n diyelim. Her ne denli n şekilde 8 ise de, biz n’nin çok, ama çok büyük, “sonsuza yakın” (ne demekse!) bir sayı olduğunu varsayalım.

Küçük çemberin çevresine ℓ, büyük çemberin çevresine ℓ' diyelim. Küçük çemberin çapına r, büyük çemberin çapına da r' diyelim. Ve küçük çokgenin çevresine ℓ_n, büyük çokgenin çevresine ℓ'_n diyelim.

Üçgenlerden birini büyültelim:

[3] Tales teoremi biraz daha geneldir, ama hem o genel haline gereksinmeyeceğiz, hem de o genel hali bu iki özel halden kolayca çıkar.



Elbette,

$$r = AB \text{ ve } r' = AB' \tag{2}$$

ile

$$\ell_n = n \times BC \text{ ve } \ell'_n = n \times B'C'$$

eşitlikleri geçerlidir.

Birazdan $\ell/r = \ell'/r'$ eşitliğini kanıtlayacağız.

ℓ, aşağı yukarı ℓ_n'ye, yani $n \times BC$'ye eşit. n büyüdükçe BC küçülüyor ve $n \times BC$ sayısı ℓ'ye yakınsıyor. Demek ki

$$\ell \approx \ell_n = n \times BC$$

ve

$$\ell' \approx \ell'_n = n \times B'C' \tag{3}$$

aşağıyukarılıkları geçerlidir[4].

Şimdi (1), (2) ve (3)'ü kullanarak hesaplayalım:

$\ell/r =^{(2)} \ell/AB \approx^{(3)} n \times BC/AB = n \times 2BH/AB =^{(\text{Pisagor})} n \times 2B'H'/AB' = n \times B'C'/AB' \approx^{(3)} \ell'/AB' =^{(2)} \ell'/r'$.

Böylece $\ell/r = \ell'/r'$ eşitliği kanıtlanmış oldu[5].

Demek ki, herhangi bir çemberin uzunluğunu yarıçapına bölersek hep aynı sayıyı buluruz yani ℓ/r sayısı, çember ne olursa olsun, değişmez, hep aynıdır, bir sabittir. Hiç değişmeyen bu ℓ/r sabitinın yarısı da, yani $\ell/2r$ sayısı da bir sabittir. Bu sabite özel bir ad verelim: π. İşte şimdi π'yi tanımladık:

$$\pi = \ell/2r. \tag{4}$$

7. "3 < π" Eşitsizliği. π'yi tanımladık ama değerini bilmiyoruz. Yukardaki tanımdan hareket ederek, 3 < π eşitsizliğini kanıtlayalım.

---

[4] Bu aşağıyukarılıklar matematikte

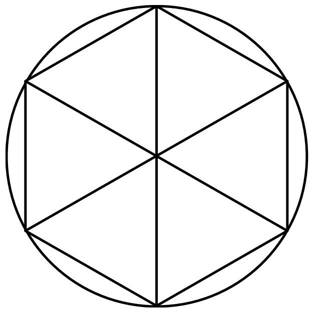
$$\ell = \lim_{n\to\infty} \ell_n = \lim_{n\to\infty} n \times BC$$

ve

$$\ell' = \lim_{n\to\infty} \ell'_n = \lim_{n\to\infty} n \times B'C'$$

olarak yazılır. Örneğin birinci eşitlik, "n sonsuza gittiğinde, $n \times BC$ sayısı ℓ'ye gider" diye okunabilir.

[5] ≈ imiyle gösterilen aşağıyukarılıklardan rahatsız olan okur, limit kavramını kullanmalıdır. O zaman yukardaki hesap şöyle olur: $\ell/r = \ell/AB = \lim_{n\to\infty} n \times BC/AB = \lim_{n\to\infty} n \times B'C'/AB' = \ell'/AB' = \ell'/r'$.



Bir dairenin içine düzgün bir altıgen yerleştirelim. Dairenin yarıçapı r olsun. Demek ki dairenin çapı $2r$. Tanıma göre, dairenin çevresini $2r$'ye bölersek π'yi elde ederiz. Bir başka deyişle, dairenin çevresi $2\pi r$'ye eşittir. Öte yandan düzgün altıgenin çevresi $6r$. Düzgün altıgenin çevresi dairenin çevresinden daha küçük olduğundan $6r < 2\pi r$ elde ederiz. Sadeleştirirsek, $3 < \pi$ bulunur, ki bu da bizim kanıtlamak istediğimiz eşitsizliktir zaten.

Bu kanıtı biraz daha az sözle şöyle gösterebiliriz:

Dairenin Çevresi = $2\pi r$

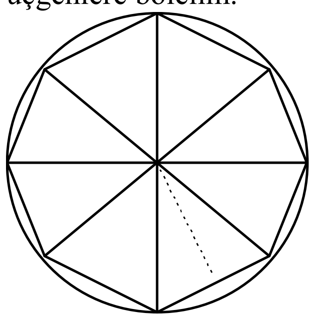
Altıgenin Çevresi = $6r$

Demek ki $6r < 2\pi r$

Yani $3 < \pi$.

8. Çemberin Çevresi. r yarıçaplı bir çember ele alalım. Bu çemberin çevresine ℓ diyelim. Üçüncü bölümdeki tanıma göre $\pi = \ell/2r$'dir. Demek ki $\ell = 2\pi r$'dir! Çemberin çevresinin formülünü bulduk[6].

9. Dairenin Alanı. Şimdi, r yarıçaplı bir dairenin alanını bulalım. Alanın πr^2'ye eşit olduğunu kanıtlayacağız. Yukarda yaptığımız gibi daireye bir çokgen yerleştirelim, yani daireyi üçgenlere bölelim.



Üçgen sayımıza n diyelim. Her ne denli şekilde n, 8'e eşitse de, aslında n çok büyük bir sayı, sonsuza yakın! Çokgenin çevresi ℓ_n, alanı da A_n olsun. Çemberin çevresi ℓ, alanı A olsun. n ne kadar büyükse ℓ_n ve A_n sayıları ℓ ve A'ya o kadar yakındır. Üçgenlerin yüksekliğine h, tabanına b diyelim. Her üçgenin alanı $bh/2$'dir. n tane üçgen olduğundan, çokgenin alanı $nbh/2$'dir. Demek ki

$$A_n = nbh/2$$

eşitliği geçerlidir. Öte yandan h aşağı yukarı r'ye eşittir[7]. Yukardaki eşitlikteki h yerine r'yi koyarsak,

$$A_n \approx nbr/2$$

elde ederiz. Ama nb çokgenin çevresine, yani ℓ_n'ye eşit. Yukardaki aşağıyukarılıktaki nb yerine ℓ_n koyalım.

$$A_n \approx r\ell_n/2$$

elde ederiz. Şimdi n'yi sonsuza götürelim. O zaman A_n sayısı A'ya, ℓ_n sayısı da ℓ'ye dönüşür ve yukardaki aşağıyukarılık,

$$A = r\ell/2$$

eşitliğine dönüşür. Yukarda

$$\ell = 2\pi r$$

eşitliğini kanıtlamıştık. $A = r\ell/2$ formülündeki ℓ yerine $2\pi r$ koyalım:

$$A = r(2\pi r)/2 = \pi r^2$$

elde ettik. Çemberin alanını bulduk.

---

6 Ama π'nin tam değerini bilmediğimiz için bu formülü kullanarak bir çemberin çevresini sayısal olarak hesaplayamayız.

7 n'nin çok büyük bir sayı olduğunu unutmayın.

10. π'nin Değeri. Yazının süreğinde π sayısının nasıl hesaplanacağına ilişkin birkaç ilginç bilgi vereceğim. Vereceğim bu bilgileri burda kanıtlamama olanak yoktur, bunlar ancak üniversite düzeyinde kanıtlanabilir.

Aşağıdaki sonsuz toplama bakalım:

$$1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + ...$$

Bu sonsuz toplam sonlu bir sayıdır. Bu sonlu sayı, sıkı durun, $\pi/4$'e eşittir. Yani,

$$\pi = 4 \times (1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + ...)$$

eşitliği geçerlidir.

Yavaş yavaş hesaplayalım bu toplamı.

$4 \times 1/1 = 4$

$4 \times (1/1 - 1/3) = 8/3 = 2{,}6666...$

$4 \times (1/1 - 1/3 + 1/5) = 52/15 = 3{,}4666...$

$4 \times (1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7) = 304/105 \approx 2{,}895238095$

$4 \times (1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9) = 1052/315 \approx 3{,}33968254$

$4 \times (1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11) = 10312/3465 \approx 2{,}976046176$

$4 \times (1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13) = 36979/45045 \approx 3{,}283738484$.

Elde ettiğimiz sayılar (bunlara kısmi toplamlar denir) bir büyür bir küçülür ve sonsuza ne denli yaklaşırsak, bu sayılar π'ye o denli yakınsarlar. Bilgisayarımda biriki hesap yaptım, işte sonuçları[8]:

İlk 1 terimin toplamı	=	1
İlk 2 terimin toplamı	≈	2,666667
İlk 3 terimin toplamı	≈	3,466667
İlk 4 terimin toplamı	≈	2,895238
İlk 5 terimin toplamı	≈	3,339683
İlk 6 terimin toplamı	≈	2,976046
İlk 7 terimin toplamı	≈	3,283739
İlk 8 terimin toplamı	≈	3,017072
İlk 9 terimin toplamı	≈	3,252366
İlk 10 terimin toplamı	≈	3,04184
İlk 100 terimin toplamı	≈	3,13193
İlk 101 terimin toplamı	≈	3,151493
İlk 1000 terimin toplamı	≈	3,140593
İlk 1001 terimin toplamı	≈	3,142592
İlk 2000 terimin toplamı	≈	3,14109
İlk 3000 terimin toplamı	≈	3,141260
İlk 4000 terimin toplamı	≈	3,141345
İlk 10000 terimin toplamı	≈	3,141498
İlk 20000 terimin toplamı	≈	3,141547
İlk 30000 terimin toplamı	≈	3,141563
İlk 40000 terimin toplamı	≈	3.141571
İlk 50000 terimin toplamı	≈	3.141571
İlk 60000 terimin toplamı	≈	3.141571
İlk 70000 terimin toplamı	≈	3.141582

8 Bilgisayarımda virgülde sonra altı basamaktan fazla gitmesini bilmiyorum. Bilgisayarım virgülden sonraki yedinci rakamı yazmıyor ve sayıyı milyonda bire yuvarlıyor. Bu yuvarlamaların sayısı arttıkça, yapılan yanlış da artabilir ne yazık ki. Bu yüzden bu sayılara pek güvenmemek gerekir.

İlk 80000 terimin toplamı	≈	3.141583
İlk 90000 terimin toplamı	≈	3.141585
İlk 100000 terimin toplamı	≈	3.141586
İlk 120000 terimin toplamı	≈	3.141588
İlk 150000 terimin toplamı	≈	3.141589
İlk 230000 terimin toplamı	≈	3.141592

π'ye yakınsamak için başka formüllerden de yararlanabiliriz. İşte bu formüllerden bir başkası:

$\pi/4 = (2/3\times4/3)(4/5\times6/5)(6/7\times8/7)(8/9\times10/9)\ (10/11\times12/11)...$

Bu, sonsuz bir çarpımdır. Bu sonsuz çarpım şöyle de yazılabilir:

$$\pi/4 = 8/9 \times 24/25 \times 48/49 \times 80/81 \times 120/121...$$

yani,

$$\pi = 4 \times 8/9 \times 24/25 \times 48/49 \times 80/81 \times 120/121...$$

Bu terimlerin birkaç tanesini elle çarpalım:

İlk 1 terimin çarpımı	=	4		
İlk 2 terimin çarpımı	=	32/9	=	$3{,}5555\overline{5}$
İlk 3 terimin çarpımı	=	256/75	=	$3{,}4133\overline{3}$
İlk 4 terimin çarpımı	=	4096/1225	≈	3,343673469
İlk 5 terimin çarpımı	=	65536/19845	≈	3,30239355

Hep 1'den küçük bir sayıyla çarptığımızdan sayılar gittikçe küçülürler. Bu çarpımı sonsuza dek yapabilirsek, sonsuzda tam tamına π sayısını buluruz. Bilgisayarıma hesaplattırdım ve aşağıdaki sonuçları buldum:

İlk 10 terimin çarpımı	≈	3,20771
İlk 20 terimin çarpımı	≈	3,177493
İlk 30 terimin çarpımı	≈	3,166232
İlk 40 terimin çarpımı	≈	3,160348
İlk 100 terimin çarpımı	≈	3,149302
İlk 500 terimin çarpımı	≈	3,143157
İlk 1000 terimin çarpımı	≈	3,142376
İlk 2000 terimin çarpımı	≈	3,141989
İlk 2563 terimin çarpımı	≈	3,141854

Bundan sonraki sayılar değişmiyor, çünkü bilgisayarımda virgülden sonra ancak altı hane gidebiliyorum. Daha sonraki çarpımlar 0,999999... olduğundan bilgisayarım bu sayıyı 1 sanıyor. (Bir komutla virgülden sonra istediğim kadar gidebilmeliyim, ama komutu bilmiyorum.) Bu formüle Wallis formülü denir.

π'yi şu formülle de hesaplayabiliriz:

$$\pi^2/8 = 1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + \cdots$$

Doğanın bir garipliği...

π'yi hesaplamanın bir başka yolu da aşağıdaki formülü kullanmaktır:

$$\pi/4 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{6}{8^{2n+1}} + \frac{2}{57^{2n+1}} + \frac{1}{239^{2n+1}}\right),$$

yani

$$\pi = 4 \times \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{6}{8^{2n+1}} + \frac{2}{57^{2n+1}} + \frac{1}{239^{2n+1}}\right).$$

Bu seri π'ye yukardakilerden çok daha hızlı yakınsar. Örneğin, daha birinci terimde,

$$4\times(6/8 + 2/57 + 1/239) = 43009/13623 \approx 3,157087279$$

sayısını buluruz, gerçek π'ye oldukça yakın. Bunun kısmi toplamlarını hesaplayalım:

İlk 1 terimin toplamı	$\approx$	3,157087
İlk 2 terimin toplamı	$\approx$	3,141448
İlk 3 terimin toplamı	$\approx$	3,141594
İlk 4 terimin toplamı	$\approx$	3,141593

Bilgisayarım bundan sonra hep aynı sayıyı veriyor. Bu son formül 1962 yılında Shanks ve Wrench tarafından bulunmuştur[9].

π'nin virgülden sonra, diyelim 216ıncı rakamını hesaplamak için formüller de vardır. Ama ne yaparsak yapalım, π'yi hiçbir zaman tam olarak bulamayız, ama π'ye (kesirli sayılarla) dilediğimiz kadar yakınsayabiliriz.

9 Bknz. Math Comp. 16. cilt, sayfa 76 (1962).