Bir Sınav Sorusu

Ali Nesin

Geçenlerde derse girerken öğrencilerimi sınıfta aralarında tartışırken, bensiz matematik ve gürültü yaparken yakaladım! Şu ifadeyi duydum: İlk yüz sayıdan 51 tanesini seçersen[1], bu seçilen sayılardan biri seçilen sayılardan bir başkasını bölmek zorundadır... Seçim ne olursa olsun...

İlgimi çekti...

Kanıtını bilmiyorlarmış, arıyorlarmış. Bir hoca arasınavda sormuş bu soruyu. Hiçbiri yapamamış!

Tam iki saat boyunca, yedi öğrenci, bir asistan ve bir hoca (ben!) bu soruyla uğraştık... Altından girip üstünden çıktık, sağından girdik solundan çıktık, öyle aldık olmadı, böyle aldık olmadı. Yapamadık! Olmadı olmadı olmadı...

Soruyu soran hocaya kızdım ve söylendim içimden... Benim bile yapamadığım bir soruyu öğrencilere nasıl sorar! Üstelik birinci sınıf öğrencilerine...

Madara oldum!

Akşam, evimde bir parti verdim bölümümüze gelen bir konuk konuşmacının onuruna. Konuşmacımız İsrail'den geliyor ve konusunun uzmanı, dünyaca tanınmış bir matematikçi. Soruyu soran hocamız da orada. Öğrenciler de...

Herkesin çakır keyif olduğu bir anda soruyu attım ortaya. Zaten aklımdan çıkmıyordu. Konuğumuz attığım soruya takıldı. İki saat boyunca düşündü... Altından girip üstünden çıktı, sağından girdi solundan çıktı, öyle aldı olmadı, böyle aldı olmadı. Yapamadı! Olmadı olmadı olmadı... O da bulamadı...

Soruyu soran hocamız da kıs kıs gülüyordu köşesinde.

Sorunun yanıtını daha sonra biri söyledi de öyle öğrendim. Çok basitmiş...

Hep öyle olur... Bir soru yapana kadar zordur, yaptıktan sonra çok kolaydır.

Her x sayısı, bir u tek sayısı için

$$x = 2^n \times u$$

biçiminde yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned} 48 &= 2^4 \times 3 \\ 64 &= 2^6 \times 1 \\ 29 &= 2^0 \times 29 \\ 99 &= 2^0 \times 99 \\ 100 &= 2^2 \times 25. \end{aligned}$$

Eğer sayımız (yani x) en fazla 100 ise, u en fazla 99 olabilir, çünkü u sayısı 1, 3, 5, 7, ..., 99 tek sayılarından biri olmalıdır. Burada da 50 tane sayı var. Demek ki seçilen 51 sayıdan en az ikisinin u sayısı aynı olmalıdır, yani seçilen sayılardan ikisi, aynı u (tek) sayısı için, $2^n u$ ve $2^m u$ biçiminde yazılır. Dolayısıyla biri öbürünü böler (eğer $n < m$ ise, $2^n \times u$ sayısı $2^m \times u$ sayısını böler.)

Hoş bir kanıt.

Tabii daha genel sonuç şu: 1, 2, ..., $2n$ sayıları arasından $n + 1$ tanesini seçersek, bu seçilmiş sayılardan biri bir diğerini böler. Kanıt aynı.

[1] Bu yazıda "sayı" sözcüğünü 1, 2, 3 gibi sayma sayıları için kullanıyoruz.

Ayrıca $n+1$, $n+2$, ..., $2n$ sayılarından hiçbiri bir diğerini bölmediğinden, yukardaki sonuçta bulduğumuz $n + 1$ sayısını daha da düşüremeyiz.