

## Bir Olasılık Sorusu

Ali Nesin

1, 2, 3, ..., 9 sayıları arasından  $n$  tane rastgele sayı çekiliyor. (Aynı sayı birkaç kez çekilebilir, yani her çekişten sonra çektiğimiz sayıyı geri koyuyoruz.) Bu  $n$  sayının çarpımının  $10$ 'a bölünme olasılığı kaçtır? Eğer  $n = 1$  ise, bu olasılık  $0$ 'dır elbette. Ama  $n \geq 2$  ise kaçtır?

Seçilen  $n$  sayının çarpımının  $10$ 'a bölünmesi için, seçilen sayılardan en az birinin  $2$ 'ye ve en az birinin  $5$ 'e bölünmesi gerekir. Yani sayılardan en az biri 2, 4, 6 ya da 8 olmalı ve en az biri 5 olmalı.

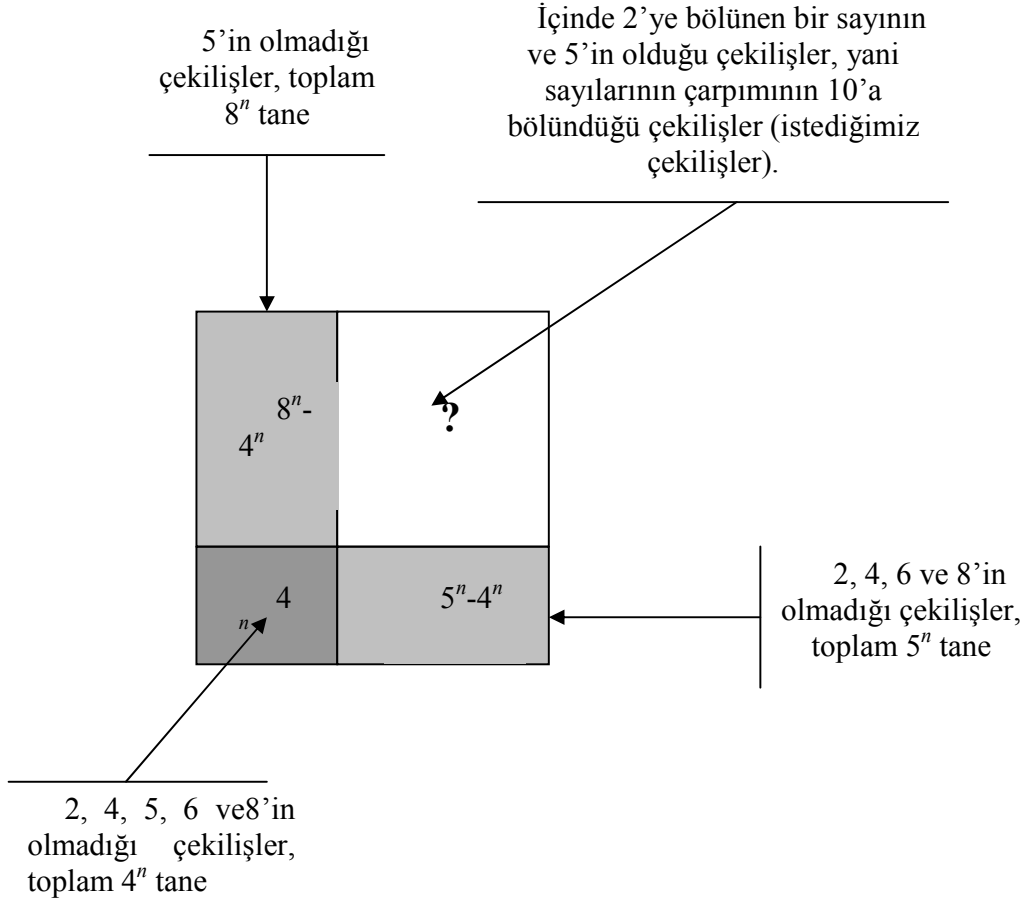
Dört olguya gereksiniyoruz:

A. 9 sayı arasından  $n$  sayı seçtiğimizden, toplam olay sayımız  $9^n$  dir.

B. İçinde 2, 4, 6, 8 olmayan olayların sayısı  $5^n$  dir, çünkü geriye 1, 3, 5, 7, 9 (beş tane) sayı kalmıştır.

C. Buna benzer nedenden, içinde 5 olmayan olay sayısı  $8^n$  dir.

D. Yukardaki iki olay kümesinin kesişimi, içinde 2, 4, 5, 6, 8 olmayan olaylar kümesidir ve bu kümede  $4^n$  tane olay vardır.



Yukardaki şekilde özetlediğimiz bu dört olgudan, içinde 5'in ve 2, 4, 6 ve 8'den birinin bulunduğu olay sayısını hesaplayacağız. Yani yukardaki şekildeki “?” ile belirtilen sayının değerini hesaplayacağız.

Toplam  $9^n$  olaydan,  $5^n - 4^n$ ,  $8^n - 4^n$  ve  $4^n$  sayılarını çıkarırsak, ilgilendiğimiz olayların sayısını buluruz:

$$9^n - (5^n - 4^n) - (8^n - 4^n) - 4^n = 9^n - 5^n + 4^n - 8^n + 4^n - 4^n = 9^n - 5^n + 4^n - 8^n.$$

Her olayın olasılığı aynı olduğundan ( $1/9^n$ ), rastgele seçilen  $n$  sayının çarpımının 10'a bölünmeme olasılığı, bu sayıyla  $1/9^n$  nin çarpımı, yani,

$$\frac{9^n - 5^n + 4^n - 8^n}{9^n}$$

dir.