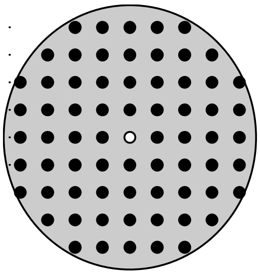
# Bahçe Sorusu

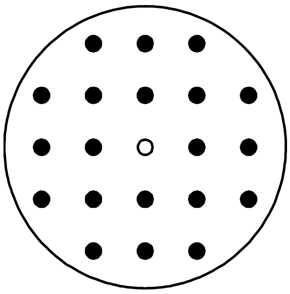
**Ali Nesin**

**1. Giriş.** Daire biçiminde bir bahçeye, merkezden başlayarak, birer metre aralıklarla yatay ve dikey sıralanmış fidan dikmeyi düşünüyoruz. İşte bahçemizi ve fidanları dikeceğimiz yerleri gösteren bir resim[1]:



Bahçenin merkezine fidan dikmeyeceğiz. Soru şu: Bahçenin merkezinden baktığımızda bahçenin dışındaki herhangi bir noktayı görebilir miyiz?

Yanıt, bahçenin büyüklüğüne ve fidanların kalınlığına göre değişir elbet. Eğer bahçe küçükse ve fidanlar inceyse, merkezden belli bir yöne bakarak bahçenin dışındaki bir noktayı görebiliriz. Ama ilk şekildeki gibi bahçe büyükse ve fidanlar kalınsa, fidanlar bahçenin dışını görmemizi engeller.



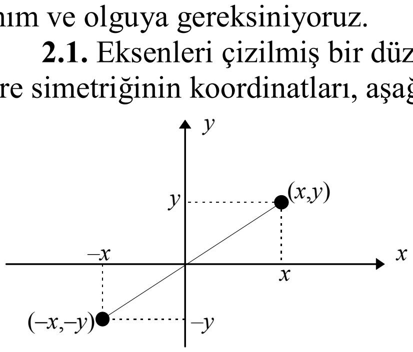
O zaman sorumuzu biraz daha belirleyelim. Bahçemizin yarıçapı 50 metre olsun. Fidanlarımızın da yarıçapı 2 santimetreden biraz büyük olsun, diyelim 2,01 santimetre. Bu ölçülerle, bahçenin merkezinden bakıldığında bahçenin dışı görülür mü?

Fidanlar her metreye dikileceğinden fidanların yarıçapı oldukça küçük sayılır. Bu yüzden bahçenin dışının görüleceği sanılabilir. Bunun doğru olmadığını göreceğiz (fidanlar küçük ama bahçe büyük!)

Bu somut problemin yanıtı soyut problemlerin yanıtını gerektirecek. **Geometrik Sayılar Kuramı** adı verilen konuda bir iki teorem kanıtlayacağız. Geometrik Sayılar Kuramı, adından da anlaşılacağı üzere, hem geometriyi hem de sayıları ilgilendiren çok güzel bir konudur. On dokuzuncu yüzyılda, Hermann Minkowski (1864–1909) adlı Litvanyalı matematikçi tarafından geliştirilmiştir ilk olarak. Yani oldukça yeni bir konu sayılır.

**2. Önbilgi.** Teoremlerimizi kanıtlamak için okurun pek yabancı olmadığını sandığım birkaç tanım ve olguya gereksiniyoruz.

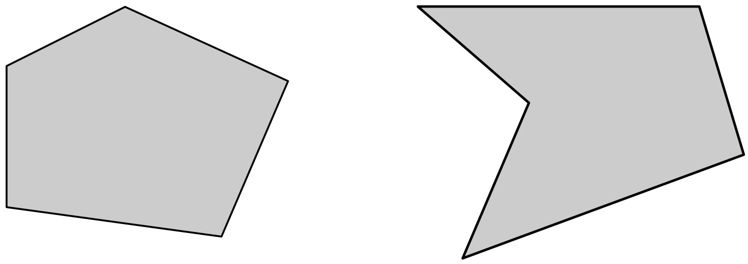
**2.1.** Eksenleri çizilmiş bir düzlemde herhangi bir $(x, y)$ noktası alalım. Bu noktanın merkeze göre simetriğinin koordinatları, aşağıdaki şekilden de anlaşılacağı gibi, $(–x, –y)$'dir.




Merkezdeki (0, 0) noktasına O noktası diyeceğiz.

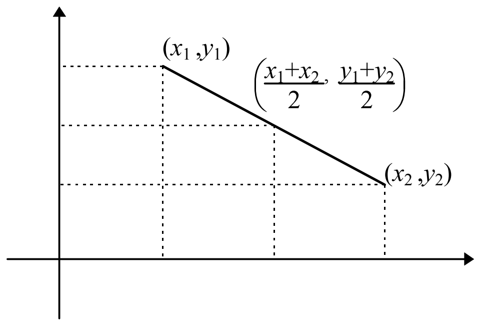
**2.2.** Düzlemde bir bölge alalım. Eğer bu bölgenin her iki noktası arasındaki doğru parçası düzlemin içine düşüyorsa, bölgeye **içbükey** adı verilir. Örneğin aşağıda soldaki bölge içbükeydir. Sağdakiyse içbükey değildir.

[1] Bu yazı, [8]'deki bir yazıdan uyarlanmıştır. İngilizce bilen okurlara bu harika popüler matematik kitabını öneririm.



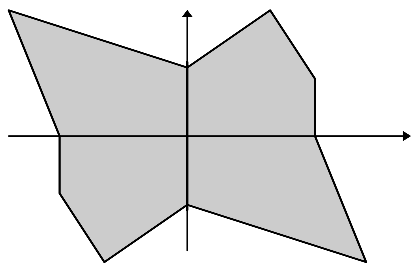
Çünkü sağdaki şekilde, sol üst ve sol alttan iki nokta alırsak, bu noktalar arasındaki doğru parçası bölgenin dışına taşar.

**2.3.** Düzlemde iki ($x_1$, $y_1$) ve ($x_2$, $y_2$) noktası alalım. Bu iki noktanın tam ortasındaki nokta $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ noktasıdır:

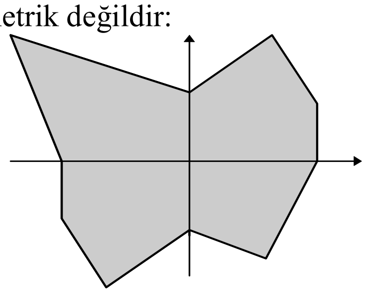



Eğer ($x_1$,$y_1$) ve ($x_2$,$y_2$) noktaları içbükey bir bölgedeyse, bu iki noktanın ortasındaki $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ noktası da aynı bölgededir.

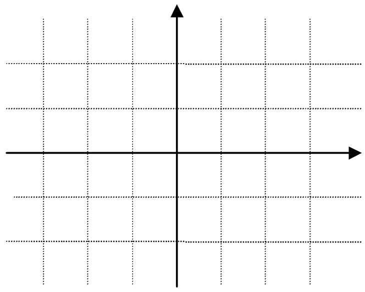
**2.4.** Gene düzlemde bir bölge alalım. Eğer, bölgedeki her ($x$,$y$) noktası için, ($-x$,$-y$) noktası da bölgedeyse, bölgeye ***O*'ya göre simetrik** (bakışık) denir. Örneğin aşağıdaki bölge *O*'ya göre simetriktir:



Aşağıdaki bölge *O*'ya göre simetrik değildir:

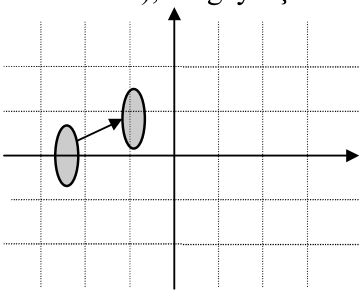


**2.5.** Koordinatları tam sayı olan noktalara **tamnokta** adını vereceğim. Örneğin, (0, 0), (3, 5), (–2, 4), (3, 0) noktaları tamnoktalardır. (1/2, 7) noktası bir tamnokta değildir. Birkaç tamnokta gösterelim (Tamnoktalar, doğruların kesişim noktalarıdır):



Fidanlarımızı bahçenin tamnoktalarına dikeceğimize okurun dikkatini çekerim.
Artık geometrik sayılar kuramının ilgilendiği sorulara geçebiliriz.

**3. Blichfeldt Önsavı.** Düzlemde bir bölge ele alalım. Eğer bölgenin alanı sıfırdan büyükse, bu bölgeyi sağa, sola, yukarı, aşağı, belli bir yöne doğru iteleyerek (döndürme yok, tek yasal hamle iteleme), bölgeyi içine bir tamnokta gelebilecek bir konuma getirebiliriz:

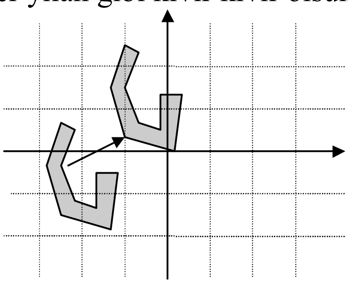


Yine aynı yöntemle, yani iteleyerek, bölgemizin içine 2 tamnokta sokabilir miyiz?

Eğer bölgenin alanı küçükse, nereye itelersek iteleyelim içine iki tane tamnokta girecek bir konuma getiremeyiz elbet. Örneğin, eğer bölgemiz küçücük bir daireyse, diyelim 1/4 yarıçaplı, o zaman bölgeyi nereye itelersek iteleyelim içine iki tane tamnokta düşüremeyiz.

Peki, belli bir yöne doğru iteleyerek içine iki tane tamnokta düşürebilmemiz için bölgenin alanı en az kaç olmalıdır? Eğer bölgenin alanı 1'den büyükse bölgeyi iteleyerek içine iki tamnokta sokabiliriz. Birazdan bunu kanıtlayacağız. Bölgenin biçimi ne olursa olsun... Yeter ki alanı 1'den büyük olsun...

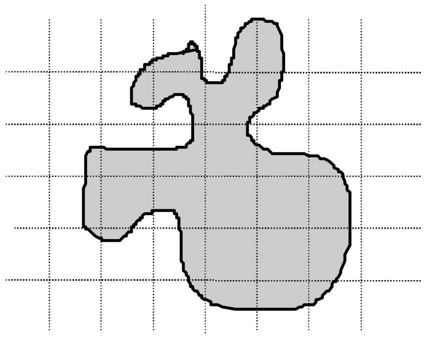
Şimdi daha zor bir soru soralım. Bölgenin içine (her zamanki gibi iteleyerek) 3 tamnokta sokabilmemiz için, bölgenin alanı en az kaç olmalıdır? Eğer alan 2'den büyükse, bölgeyi belli bir yöne doğru iteleyerek, bölgenin içine en az 3 tane tamnokta sokabileceğimizi kanıtlayacağız birazdan. Bölgenin biçimi ne olursa olsun... İster yuvarlak, ister kare, ister upuzun bir dikdörtgen, ister yılan gibi kıvır kıvır olsun... Yeter ki alanı 2'den büyük olsun.



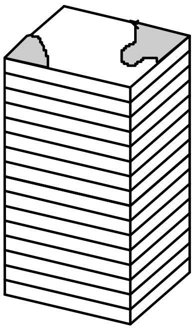
Genel olarak, eğer bölgemizin alanı $n$'den büyükse, iteleyerek (döndürmeye gerek yok) içine $n + 1$ tane tamnokta girecek konuma getirebiliriz. Bu, şimdilik bir sanı. Matematiksel kesinlikle kanıtlayamadığımız sürece de bir sanı olarak kalacak. Neyse ki Blichfeldt adlı bir Amerikan matematikçi bu sanıyı kanıtlamış.

**Blichfeldt Önsavı:** *Alanı n'den büyük olan bir bölge itelenerek içine n + 1 tane tamnokta sokulabilir.*

**Kanıt:** İlk olarak tamnoktalardan geçen yatay ve dikey doğruları çizelim. Sonra da bölgemizi bir renge boyayalım, örneğin kırmızıya:



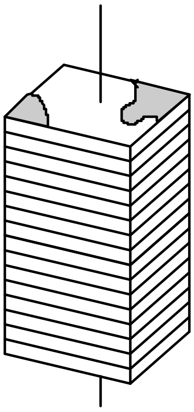
Boya değmiş kareleri keselim ve bu kareleri **döndürmeden** üstüste yığalım:



Kareleri üstüste yığarken kareleri döndürmemeye özellikle dikkat edelim. Yani kareleri yerlerinden kaldırıp üstüste yığarken karelerin yönünü değiştirmeyelim. Üstüste konmuş bir yığın kare elde ettik. Her karenin bir bölümü boyanmış, bir bölümü boyanmamış. Boyanmış bölümlerin toplam alanının *n*'den büyük olduğunu biliyoruz, çünkü bölgemizin alanı *n*'den büyüktü.

Bu kare yığınını yukardan aşağıya doğru bir tığla delelim.

Bu tığ her kareyi bir noktadan delecek. Tığın herhangi bir kareyi deldiği nokta boyanmış da olabilir, boyanmamış da. Tığ kaç boyanmış noktadan geçebilir? Hiç boyanmış noktadan geçmeyebilir, bir tek boyanmış noktadan geçebilir, iki boyanmış noktadan geçebilir... Tığı soktuğumuz yere göre değişir bu sayı.

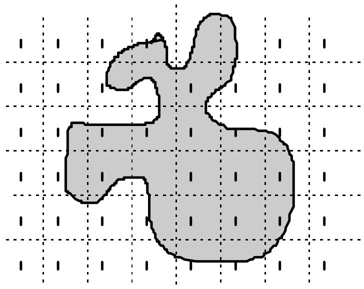


Bir sav ortaya atıyorum: **Tığı öyle bir yerden geçirebiliriz ki, tığ en az *n* + 1 tane boyalı nokta deler**.

Kanıtlamam gerek bu savımı. Kanıtlayayım. Diyelim savım yanlış. Yani diyelim ki, tığ nerden geçirilirse geçirilsin, en fazla *n* tane boyalı nokta deler. Bu varsayımdan bir saçmalık, bir çelişki çıkaracağım ve böylece savımı kanıtlamış olacağım. En alttaki kareyi ele alalım. Öbür karelerin boyalarının bu en alttaki karenin üstüne kat kat sürülmüş olduğunu varsayalım bir an. Örneğin, en alttaki karenin bir noktasının üstünde 6 tane boyalı nokta varsa, o en alttaki noktanın 6 kat boyanmış olduğunu varsayalım. Böylece en alttaki karenin her noktasını üstüne birkaç kat boya çekilmiş bir nokta olarak görebiliriz. Üstüste en fazla *n* tane boyalı nokta olduğunu varsaydığımızdan, en alttaki karenin her noktasına en fazla *n* kat boya çekilmiş olduğu anlaşılır. En alttaki karenin alanı 1 olduğundan ve her noktaya en fazla *n* kat boya çekildiğinden, toplam sürülen boya alanının en fazla *n* olduğu çıkar. Oysa boyalı alanımız *n*'den büyüktü. Bir çelişki elde ettik ve savımız kanıtlanmış oldu.

Blichfeldt'in önsavının kanıtına geri dönelim.

Şimdi, tığımızı en az *n* + 1 boyalı noktayı delecek biçimde geçirelim. Tığımız her karede bir delik açacak. Bu açılan deliklerin en az *n* + 1 tanesi boyalı noktalardan oluşuyor. Şimdi karelerimizi eski yerlerine yerleştirelim. Kareleri döndürmediğimizden, eski şekli yeniden elde ettik, aradaki tek ayrım, karelerde bulunan delikler:



Bu deliklerin yerlerine dikkat ederseniz, aynen tamnoktalar gibi yerleştirildiklerini görürsünüz. Şimdi bölgemizi, bu deliklerden herhangi birinin herhangi bir tamnokta üzerine gelecek biçimde itelersek, bölgemizin içine en az $n + 1$ tane tamnokta girdiğini görürüz.

Böylece Blichfeldt Önsavı'nı kanıtlamış olduk.

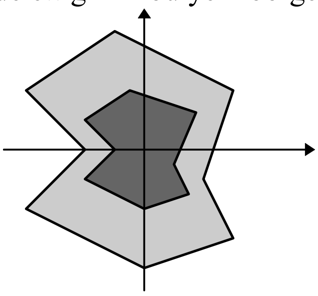
**4. Bir Sonuç.** Aslında bize gereken yukarda kanıtladığımız önsavın yalnızca özel bir durumu. Yukardaki önsavda $n$'yi 1 olarak alırsak, alanı 1'den büyük olan bir bölgeyi iteleyerek içine iki tamnokta girebilecek konuma getirebileceğimiz anlaşılır. Bundan da şu sonuç çıkar:

**Önsav.** *Alanı 1'den büyük bir bölgenin içinde, koordinatlarının farkı da tamsayı olan en az iki nokta vardır. Yani bölgenin içinde öyle* $(x_1, y_1)$ *ve* $(x_2, y_2)$ *noktaları vardır ki,* $x_2 - x_1$ *ve* $y_2 - y_1$ *birer tamsayıdır.*

**5. Minkowski'nin Teoremi.** Sıra Minkowski'nin ünlü teoremini kanıtlamaya geldi. Görüldüğü gibi bahçe problemini çözmek pek kolay değil.

**Minkowski Teoremi.** *Alanı 4'ten büyük ve O'ya göre simetrik olan içbükey bir bölgede* (0, 0)'*dan, yani O'dan başka bir tamnokta daha vardır.*

**Kanıt:** Bölgemize $B$ adını verelim. $B$ bölgesini 1/2 ölçütünde merkeze doğru küçültelim. Elde ettiğimiz bu yeni bölgeye $C$ adını verelim. İşte $B$'yle $C$'nin resmi:



$B$'yle $C$'nin alanları arasında nasıl bir ilişki vardır? Eğer $B$ bir dikdörtgen olsaydı, $C$, $B$'nin boyutlarının yarısı kadar bir dikdörtgen olurdu, dolayısıyla $C$'nin alanı $B$'nin alanının dörtte biri olurdu. Eğer $B$ bir üçgen olsaydı, gene aynı nedenden $C$'nin alanı $B$'nin alanının dörtte biri olurdu. Genel olarak, $B$'nin şekli ne olursa olsun, $C$'nin alanı $B$'nin alanının dörtte biridir. $B$'nin alanının 4'ten büyük olduğunu biliyoruz. Demek ki $C$'nin alanı 1'den büyüktür. Dolayısıyla $C$'ye Blichfeldt'in önsavının sonucunu uygulayabiliriz: $C$'de öyle $(x_1,y_1)$ ve $(x_2,y_2)$ noktaları vardır ki, $x_2 - x_1$ ve $y_2 - y_1$ birer tamsayıdır.

$B$ bölgesi $O$'ya göre simetrik olduğundan, $C$ de $O$'ya göre simetriktir. Dolayısıyla $(-x_1, -y_1)$ noktası da $C$'dedir.

$B$ içbükey olduğundan $C$ de içbükeydir. Demek ki, $C$'de bulunduğunu bildiğimiz $(-x_1, -y_1)$ ve $(x_2, y_2)$ noktalarının tam ortası olan $\left(\frac{x_2 - x_1}{2}, \frac{y_2 - y_1}{2}\right)$ noktası da $C$'dedir. $C$'nin bu noktasına $B$'de $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ noktası tekabül eder. $x_2 - x_1$ ve $y_2 - y_1$ tamsayı olduklarından bu son nokta bir tamnoktadır. Bulduğumuz bu tamnokta (0,0) noktasından, yani merkezden değişiktir. Sonuç olarak $B$'de merkezden değişik bir tamnokta bulduk: $(x_2–x_1, y_2–y_1)$ noktası. Minkowski'nin ünlü teoremi de böylece kanıtlanmış oldu.

**6. Bahçe Probleminin Çözümü.** Şimdi artık bahçe problemine saldırabiliriz. Bahçemiz 50 metre yarıçaplı bir daire. Bahçenin merkezine $O$ diyelim (Aşağıdaki şekle bakın.) Her fidanın yarıçapı 2 santimetreden, yani 1/50 metreden daha büyük. En küçük fidanın çapına $r$ diyelim.

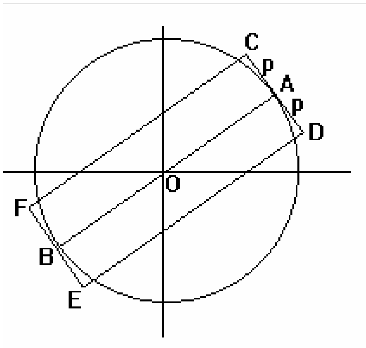
Metreyle ifade edersek, $r > 1/50$ eşitsizliğini elde ederiz. Öte yandan $r < 1$ çünkü fidanların çapları 1 metreden büyük olamaz (yoksa fidanlar birbirlerine toslarlar.) Şimdi $p$, $1/50 < p < r$ eşitsizliklerini sağlayan herhangi bir sayı olsun[2]. Özet olarak,

$$1/50 < p < r < 1$$

eşitsizlikleri geçerli. Bu eşitsizlikleri aklımızda tutalım, birazdan gerekecekler.

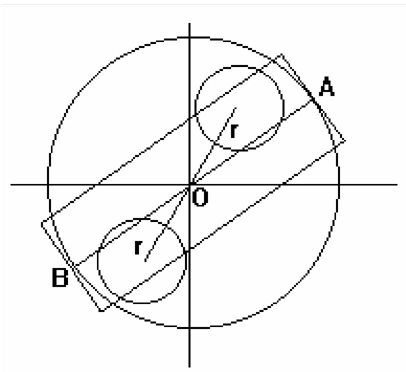
Bahçenin sınırında herhangi bir $A$ noktası alalım. Merkezden bakıldığında bu $A$ noktasının görünmediğini kanıtlayacağım. Böylece problemimizi çözmüş olacağız.

$B$ noktası, $OA$ doğrusuyla bahçemizin sınırının kesiştiği öbür nokta olsun. $A$ ve $B$ noktalarından bahçemize birer teğet çıkalım. Ve bu teğetlerin üstünde bu noktalardan $p$ uzaklıkta $C$, $D$, $E$ ve $F$ noktaları alalım.




*CDEF* dikdörtgenine bakalım. Bu dikdörtgenin boyu bahçenin çapına, yani 100'e eşit. Eniyse $2p$'ye eşit. Demek ki *CDEF* dikdörtgeninin alanı $100 \times 2p = 200p$'dir. Ama $p > 1/50$. Demek ki *CDEF* dikdörtgeninin alanı $200 \times 1/50$'den yani 4'ten daha büyük. *CDEF* dikdörtgeni içbükey olduğundan ve $O$'ya göre simetrik olduğundan, biraz önce kanıtladığımız Minkowski'nin teoremine göre, bu dikdörtgenin içinde $O$'dan başka bir tamnokta daha vardır. Bu tamnoktaya $T$ adını verelim. $T$'nin $O$'ya göre simetriği de bir tamnoktadır; bu tamnoktaya da $T'$ adını verelim.

$T$ noktası bahçenin içinde olabilir de olmayabilir de. Önce $T$'nin bahçenin içinde olduğunu varsayalım. $T$ bahçedeyse, $T'$ noktası da bahçededir. Bu iki tamnoktaya birer fidan dikilecek.




*CDEF*'nin eni $2p$ olduğundan ve her fidanın çapı $p$'den daha büyük olduğundan, yukardaki şekilden de anlaşılacağı üzere, $T$ ve $T'$ noktalarına dikilen fidan $A$ ve $B$ noktalarının merkezden görünmesini engelleyecektir.

Şimdi de $T$'nin bahçede olmadığını varsayalım. Demek ki $OT$ uzunluğu bahçenin yarıçapından, yani 50'den daha büyük. Öte yandan $T$ dikdörtgenin içinde, dolayısıyla $OT$ uzunluğu $OC$'den daha küçük olmalı. $OAC$ diküçgenine bakalım. Pisagor teoremine göre,

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 = 50^2 + p^2 < 2501.$$

Sonuç olarak,

$$2500 < OT^2 \leq OC^2 < 2501$$

eşitsizliklerini elde ettik. $T$ tamnoktasının koordinatlarına $x$ ve $y$ diyelim. $x$ ve $y$ birer tamsayı. Dolayısıyla, $OT^2 = x^2 + y^2$ de bir tamsayı. Demek ki $OT^2$, 2500'den büyük ve 2501'den küçük bir tamsayı! Böyle bir tamsayı olmadığından, $T$ noktası bahçenin içinde olmalı.

Problemimizi çözdük: Bahçenin dışını göremeyiz.

[2] $p$'yi $(r + 1/50)/2$ olarak alabiliriz dilersek.