Ardışık Sayıların Toplamı

Ali Nesin

Bu yazıda “sayı” sözcüğünü, 1, 2, 3, 4, 5 gibi, pozitif tamsayılar için kullanacağız. Konumuz ardışık sayıların toplamı. 7 ve 8 gibi, ya da 7, 8 ve 9 gibi ardarda gelen sayılara **ardışık** denir. Örneğin, 17 iki ardışık sayının toplamıdır:

$$17 = 8 + 9.$$

21, üç ardışık sayının toplamıdır:

$$21 = 6 + 7 + 8.$$

21, aynı zamanda altı ardışık sayının toplamıdır:

$$21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6.$$

45, iki ya da daha çok ardışık sayının toplamı olarak beş değişik biçimde yazılır:

$$\begin{aligned} 45 &= 22+23 \\ &= 14+15+16 \\ &= 7+8+9+10+11 \\ &= 5+6+7+8+9+10 \\ &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9 \end{aligned}$$

44, sekiz ardışık sayının toplamıdır:

$$44 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

(ve 44, iki ya da daha çok ardışık sayının toplamı olarak başka türlü yazılamaz.) Ama 1, 2 ve 4 sayıları iki ya da daha çok ardışık sayının toplamı değildirler. 7 ve 11 sayıları iki ardışık sayının toplamı olarak yazılabilirler ama üç veya daha fazla ardışık sayının toplamı olarak yazılamazlar.

Bu yazıda hangi sayıların en az iki ve en az üç ardışık sayının toplamı olduğunu bulmaya çalışacağız. Daha doğrusu siz bulmaya çalışacaksınız. Aşağıda bu amaçla sekiz soru bulacaksınız. Asıl amaç altıncı ve sekizinci soruları yanıtlamak. Kimi okurun doğrudan bu sorularla uğraşmak için yeterince zamanı olmayabilir. Bu okurların ilk basamaktan, yani birinci sorudan başlamalarını öneririm. Önce birinci soruyu çözen okur ikinci soruyu daha kolaylıkla çözecektir. Önce ikinci soruyu çözen okur üçüncü soruyu daha kolaylıkla çözecektir... Yani sorular gittikçe güçleşmektedirler. En zor sorular altıncı ve sekizinci sorulardır. Kendine güvenen okur yedinci sorudan başlayabilir.

Çoğu zaman olduğu gibi (ama her zaman değil), burda da, araştırmaya deneyle başlamak yararlı olabilir. Örneğin 1’den 50’ye kadar olan sayılardan hangilerinin en az iki ardışık sayının toplamı olduğunu bulmaya çalışırsanız, hem sorunun yanıtını tahmin edebilirsiniz, hem de tahmininizin doğru olduğunu nasıl kanıtlamanız gerektiğini anlayabilirsiniz.

Önce ilk 48 sayıya gözatalım. Bu sayıları en az iki ardışık sayının toplamı olarak yazmaya çalışalım. Aşağıdaki tabloda en kısa ve en uzun toplamları bulacaksınız:

1	**yazılamaz**	**25**	**12 + 13;3 + 4 + 5 + 6 + 7**
2	**yazılamaz**	**26**	**5 + 6 + 7 + 8**
3	**1 + 2**	**27**	**13 + 14; 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7**
4	**yazılamaz**	**28**	**1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7**
5	**2 + 3**	**29**	**14 + 15**
6	**1 + 2 + 3**	**30**	**9 + 10 + 11;4 + 5 + 6 + 7 + 8**
7	**3 + 4**	**31**	**20 + 21**
8	**yazılamaz**	**32**	**yazılamaz**
9	**4 + 5; 2 + 3 + 4**	**33**	**16 + 17; 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8**
10	**1 + 2 + 3 + 4**	**34**	**7 + 8 + 9 + 10**
11	**5 + 6**	**35**	**17 + 18; 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8**

12	3 + 4 + 5	36	11 + 12 + 13; 1 + 2 + ... + 8
13	6 + 7	37	13 + 14
14	2 + 3 + 4 + 5	38	8 + 9 + 10 + 11
15	7 + 8; 1 + 2 + 3 + 4 + 5	39	19 + 20; 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9
16	yazılamaz	40	6 + 7 + 8 + 9 + 10
17	8 + 9	41	20 + 21
18	5 + 6 + 7; 3 + 4 + 5 + 6	42	13 + 14 + 15; 3 + 4 + ... + 9
19	9 + 10	43	21 + 22
20	2 + 3 + 4 + 5 + 6	44	2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9
21	10 + 11; 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	45	22 + 23; 1 + 2 + ... + 9
22	4 + 5 + 6 + 7	46	10 + 11 + 12 + 13
23	11 + 12	47	23 + 24
24	7 + 8 + 9	48	15 + 16 + 17

Birinci Soru. *Hangi sayılar ardışık iki sayının toplamıdır?*

Birinci Sorunun Yanıtı. Okur yanıtı okumadan önce düşünmelidir. Psikolojik olarak yardım edecekse söyleyeyim: Pek o kadar zor bir soru değil. Birkaç deneme sorunun yanıtını verecektir.

Biz de deneyelim:

$$
\begin{aligned}
1 + 2 &= 3\\
2 + 3 &= 5\\
3 + 4 &= 7\\
4 + 5 &= 9\\
5 + 6 &= 11\\
6 + 7 &= 13\\
7 + 8 &= 15\\
8 + 9 &= 17\\
9 + 10 &= 19\\
10 + 11 &= 21\\
11 + 12 &= 23
\end{aligned}
$$

Görüldüğü gibi, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 sayılarını iki ardışık sayının toplamı olarak yazabildik. Bu sayıların hep tek sayı oldukları gözünüzden kaçmamıştır. Doğru, eğer iki ardışık sayıyı toplarsak hep tek sayı elde ederiz.

Neden?

Kanıtlayalım. Ardışık iki sayıdan biri tektir, öbürü çift; dolayısıyla bu iki sayıyı topladığımızda tek sayı elde ederiz. Demek ki iki ardışık sayının toplamı hep tek sayıdır.

Bunun tersi de hemen hemen doğrudur: 1 dışında her tek sayı, iki ardışık sayının toplamıdır. Örneğin, 125, 62 + 63 olarak; 147, 73 + 74 olarak yazılabilir. 1 dışında her tek sayının iki ardışık sayının toplamı olduğunu kanıtlayabilir miyiz?

Evet.

Kanıt oldukça kolaydır: $x \neq 1$ herhangi bir tek sayı olsun. x tek olduğundan, x'i $2n + 1$ olarak yazabiliriz. Şimdi x'i, $n + (n + 1)$ olarak, yani iki ardışık sayının toplamı olarak yazabiliriz. (Not: $x > 1$ olduğundan, $n \geq 1$'dir.)

İkinci Soru. *Hangi sayılar üç ardışık sayının toplamıdır?*

İkinci Sorunun Yanıtı. Yukardaki gibi birkaç deneme yapmak sorunun yanıtını verecektir:

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 3 &= 6\\
2 + 3 + 4 &= 9\\
3 + 4 + 5 &= 12\\
4 + 5 + 6 &= 15\\
5 + 6 + 7 &= 18\\
6 + 7 + 8 &= 21
\end{aligned}
$$

Hep üçe bölünen sayılar elde ediyoruz. Hepsini mi? Hayır! 3 sayısı, üç ardışık sayının toplamı değildir. Ama 3 dışında üçe bölünen her sayı üç ardışık sayının toplamıdır. Gibi gözüküyor… Demek ki savımız şu olmalı: Üç ardışık sayının toplamı üçe bölünür ve 3 dışında üçe bölünen her sayı üç ardışık sayının toplamıdır. Savımızı kanıtlayalım.

Üç ardışık sayı alalım. Bu sayıların ortancasına n diyelim. Demek ki üç sayımız $n - 1$, n ve $n + 1$. Bu üç sayıyı toplayalım:

$$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$$

elde ettik. Bu sayı üçe bölünür. Demek ki, her üç ardışık sayının toplamı üçe bölünür.

Şimdi de üçe bölünen ama 3 olmayan herhangi bir sayı ele alalım. Bu sayıya x diyelim ve x'in üç ardışık sayının toplamı olduğunu kanıtlayalım. Yukardaki dizelge aşağı yukarı kanıtı veriyor: Eşitliğin solundaki ortanca sayı, toplamın üçte biri. x'i üçe bölelim. Çıkan sayıyı, bir öncekini ve bir sonrakini toplayalım. x'i elde ederiz. Örneğin, $x = 27$ ise, $x/3 = 9$'dur ve $27 = 8 + 9 + 10$'dur.

Biçimsel olarak şöyle kanıtlarız: x üçe bölündüğünden, x'i $3n$ olarak yazabiliriz: $x = 3n$. Şimdi aşağıdaki eşitliğe bakın:

$$x = 3n = (n - 1) + n + (n + 1).$$

Demek ki, x, üç ardışık sayının ($n - 1$'in, n'nin ve $n + 1$'in) toplamıdır. (Not: $x > 3$ olduğundan, $n - 1 \geq 1$'dir.)

Savımız kanıtlanmıştır.

Üçüncü Soru. *Hangi sayılar beş ardışık sayının toplamıdır?*

5 ve 10 dışında, beşe bölünen her sayı beş ardışık sayının toplamıdır. Örneğin,

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$
$$20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$
$$25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

Bu dizelge de kanıtı aşağı yukarı veriyor. Eşitliğin sağ tarafının ortanca sayı, toplamın beşte biri. x, beşe bölünen ama ne 5 ne de 10 olan bir sayı olsun. $x = 5n$ olarak yazalım. Şimdi x,

$$n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$$

ardışık sayılarının toplamıdır. (Not: $x \geq 15$ olduğundan, $n - 2 \geq 1$'dir.)

Dördüncü Soru. *Hangi sayılar yedi ardışık sayının toplamıdır?*

Dördüncü Sorunun Yanıtı. Bu sorunun yanıtı da ikinci ve üçüncü soruların yanıtı gibidir. 7, 14 ve 21 dışında yediye bölünen her sayı yedi ardışık sayını toplamıdır. Biçimsel kanıtı okura bırakıyorum.

Beşinci Soru. *En az iki ardışık sayının toplamı olan sayıların 1'den büyük bir tek sayıya bölündüklerini, yani 2^n biçiminde yazılamayacaklarını kanıtlayın.*

Beşinci Sorunun Yanıtı. x, en az iki ardışık sayının toplamı olan bir sayı olsun. Diyelim, x sayısı,

$$b, b + 1, b + 2, ..., b + r$$

($r + 1$ tane) ardışık sayının toplamı ($r \geq 1$ elbette.) Yani

$$x = b + (b + 1) + (b + 2) + ... + (b + r). \tag{1}$$

Bu toplamda $r + 1$ tane b var. Demek ki, toplam

$$(r + 1)b + [1 + 2 + ... + r]$$

sayısına eşit. 1'den r'ye kadar olan sayıların toplamı $r(r + 1)/2$'ye eşittir[1]. Demek ki

$$x = (r + 1)b + r(r + 1)/2.$$

$r + 1$'i dışarı çıkaralım ve eşitliği 2'yle çarpalım.

$$2x = (r + 1)(2b + r) \quad (2)$$

elde ederiz. Eğer $r + 1$ ve $2b + r$ sayılarından birinin tek olduğunu kanıtlarsak işimiz iştir, çünkü bu tek sayı x'i bölmek zorunda. Kanıtlayalım: Eğer $r + 1$ tekse bir sorun yok. Eğer $r + 1$ çiftse, r tektir ve dolayısıyla $2b + r$ de tektir[2]. Kanıtımız bitmiştir.

Yukardaki kanıtta, (1) eşitliğinden (2) eşitliğini elde ettiğimiz okurun gözünden kaçmamalıdır. Birazdan bu olguyu kullanacağız.

Altıncı Soru. *Hangi sayılar iki veya daha çok ardışık sayının toplamı olarak yazılabilir?*

Altıncı Sorunun Yanıtı. Önce bir tahminde bulunmak gerekiyor. Şimdiye değin bulduklarımızı gözden geçirelim:

Her şeyden önce beşinci soruya göre, 1, 2, 4, 8, 16 gibi 2^n biçiminde yazılan sayılar iki ya da daha fazla ardışık sayının toplamı olamazlar. Öbür sayılara bakalım.

Birinci soruya göre, 1 dışında her tek sayı iki ardışık sayının toplamıdır.

Üçe bölünen sayılara bakalım. İkinci soruya göre, 6, 9, 12, 15 gibi üçe bölünen sayılar üç ardışık sayının toplamıdır. 3 tek olduğundan, 3 de iki ardışık sayının toplamıdır. Demek ki üçe bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Şimdi de beşe bölünen sayılara bakalım. Üçüncü soruya göre, 5 ve 10 dışında beşe bölünen her sayı beş ardışık sayının toplamıdır. Tek olduğundan, 5 de iki ardışık sayının toplamıdır. Ya 10?

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

olduğundan, 10 da ardışık sayıların toplamıdır. Sonuç olarak beşe bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Sıra yediye bölünen sayılara geldi. Dördüncü soruya göre 7 ve 14 dışında yediye bölünen her sayı yedi ardışık sayının toplamıdır. 7 tektir, dolayısıyla iki ardışık sayının toplamıdır. 14'ü ardışık sayıların toplamı olarak yazmak biraz daha zor, ama yazılıyor:

$$14 = 2 + 3 + 4 + 5.$$

Demek ki yediye bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Tahminimiz ne olmalı? 2^n biçiminde yazılamayan her sayı en az iki ardışık sayının toplamı olabilir mi? Galiba, ama pek emin değiliz.

11'e bölünen sayılara bakalım. Bu sayıların çoğunun onbir ardışık sayının toplamı olduğunu hissediyoruz. Sayımıza x diyelim. x'i onbire bölelim. Çıkan sayıya n diyelim. Şimdi aşağıdaki onbir sayıyı toplayalım:

$$n - 5, n - 4, \ldots, n, \ldots, n + 4, n + 5.$$

$11n$, yani x buluruz. Ama burda $n - 5 > 0$ olmalı, yani $x/11 - 5 > 0$ olmalı, yani $x > 55$ olmalı. Peki, $x = 11, 22, 33, 44, 55$ ise ne yapacağız? Bu sayılar en az iki ardışık sayının toplamı mıdır? 11, 33 ve 55 tek olduklarından bu sayıları iki ardışık sayının toplamı olarak yazabiliriz. 22 ve 44 de en az iki ardışık tamsayının toplamıdır:

$$22 = 4 + 5 + 6 + 7$$
$$44 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9.$$

---

[1] Bu eşitlik çok bilinen bir eşitliktir. [11]'in Pisagor ve Sayılar yazısına bakınız.

[2] $2b$ çift bir sayı elbet. r de tek. Çift sayıyla tek sayının toplamı tek olduğundan, $2b + r$ tektir.

Demek ki 11'e bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Galiba tahminimiz doğru, galiba 2^n biçiminde yazılamayan her sayı (yani 1'den büyük bir tek sayıya bölünen her sayı) en az iki ardışık sayının toplamıdır. Artık savımızı yazabiliriz:

Sav. *2^n biçiminde yazılamayan her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır. Ve en az iki ardışık sayının toplamı olan hiçbir sayı 2^n biçiminde yazılamaz.*

Savın Kanıtı. Savımızın ikinci bölümünü beşinci soruda kanıtlamıştık. Birinci bölümünü kanıtlayalım. x, 2^n biçiminde yazılmayan bir sayı olsun. Demek ki x, 1'den büyük bir tek sayıya bölünür. x'i bölen tek sayıyı $2k + 1$ olarak yazalım ve bölme işleminin sonucuna a diyelim. Demek ki,

$$x = (2k + 1)a. \tag{3}$$

Şimdi $a - k$'yle $a + k$ arasındaki $2k + 1$ sayıyı toplayalım.

$$(a - k) + (a - k + 1) + ... + (a - 1) + a + (a + 1) + ... + (a + k - 1) + (a + k).$$

Bu toplamda bir sürü terim sadeleşir. Örneğin, birinci ve sonuncu terimlerdeki k'ler sadeleşir, ikinci ve sondan ikinci terimlerdeki $k - 1$'ler sadeleşir... a'lar dışındaki bütün terimler sadeleşir. Sonuç olarak $2k + 1$ tane a'yı toplarız, yani toplamın sonucu $(2k + 1)a$'dır, yani x'tir. Eğer toplamdaki ilk sayı, yani $a - k$, pozitif ise, x'i bu biçimde $2k + 1$ ardışık sayının toplamı olarak yazabiliriz. $a - k \leq 0$ ise ne yapacağız?

Bundan böyle $a - k$'nın pozitif olmadığını varsayalım, yani $a \leq k$ eşitsizliğini varsayalım. Bu durumda ne yapmalıyız? Önce yanıtı vereyim. Yanıtı nasıl bulduğumu sonra açıklayacağım[3].

$$b = k - a + 1 \tag{4}$$

ve

$$r = 2a - 1 \tag{5}$$

olsun. b'nin en az 1 olduğuna dikkatinizi çekerim. b'den $b + r$'ye kadar olan sayıları, yani

$$b, b + 1, b + 2, ..., b + r$$

sayılarını toplayalım:

$$b + (b + 1) + (b + 2) + ... + (b + r).$$

Toplamın x'e eşit olduğunu kanıtlayacağım. Beşinci sorudaki gibi hesaplarsak, toplamın

$$(r + 1)b + r(r + 1)/2$$

sayısına eşit olduğunu görürüz. Bu sayıyı (3), (4) ve (5)'teki tanımları kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned}(r + 1)b + r(r + 1)/2 &= (r + 1)(2b + r)/2\\ &=^5 2a(2b + 2a - 1)/2\\ &= a(2b + 2a - 1)\\ &=^4 a(2(k - a + 1) + 2a - 1)\\ &= a(2k + 1)\\ &=^3 x.\end{aligned}$$

Sözverdiğimiz gibi toplamın x olduğunu bulduk.

Sonuç olarak, 2^n biçiminde yazılamayan her x sayısının en az iki ardışık sayının toplamı olduğunu bulduk.

Hatta toplamamız gereken ardışık sayıları da bulduk: x'i $(2k + 1)a$ olarak yazalım.

Eğer $a > k$ ise, x, $a - k$'den $a + k$'ye kadar olan $2k + 1$ ardışık sayının toplamıdır.

Eğer $a \leq k$ ise, x, $k - a + 1$'den $k + a$'ya kadar olan $2a$ ardışık sayının toplamıdır.

---

[3] Bu açıklama, yazının sonuçlarını öğrencilerine kanıtlattırmak isteyen öğretmene yardımcı olabilir.

Şimdi $a \le k$ şıkkında, ardışık sayıları nasıl bulduğumu göstereyim. $x = (2k + 1)a$ eşitliğini biliyoruz ve x'i en az iki ardışık sayının toplamı olarak yazmak istiyoruz. Ardışık sayıları bildiğimizi varsayalım bir an. Diyelim bu sayılar b'yle $b + r$ arasındaki sayılar. b'yle r'yi bulmak istiyoruz. b'yle $b + r$ arasındaki sayıları toplarsak

$$(r + 1)(2b + r)/2$$

buluruz. Demek ki,

$$(2k + 1)a = x = (r + 1)(2b + r)/2,$$

yani

$$2a(2k + 1) = (r + 1)(2b + r).$$

r'yi $2a = r + 1$ eşitliğini sağlayacak biçimde seçelim. Demek ki, $r = 2a - 1$. Bu (5) eşitliğini verir. b'yi de $2k + 1 = 2b + r$ eşitliğini sağlayacak biçimde seçelim. Demek ki $2k = 2b + r - 1 = 2b + (2a - 1) - 1$, yani $b = k - a + 1$. Bu da (4) eşitliğidir.

Yedinci Soru. *Asal bir sayının en az üç ardışık sayının toplamı olamayacağını kanıtlayın.*

Yedinci Sorunun Yanıtı. x bir asal sayı olsun. Bir an için x'in en az üç ardışık sayının toplamı olduğunu varsayalım. Diyelim, x asal sayısı,

$$b, b + 1, b + 2, ..., b + r$$

sayılarının toplamı (burada $r \ge 2$ ve $b > 0$.) Bir çelişki elde edeceğiz. Aynen beşinci sorudaki gibi,

$$2x = (r + 1)(2b + r) \qquad (2)$$

eşitliğini elde ederiz.

Eğer $r + 1$ tekse, (2) eşitliğinden dolayı, $r + 1$, x'i böler. x asal olduğundan, $r + 1 = x$ olmalı. Bu ve (2)'den $2b + r = 2$ çıkar. Ama $b > 0$ ve $r \ge 2$, dolayısıyla $2b + r = 2$ eşitliği olanaksız.

Eğer $r + 1$ çiftse, r tektir. r tek olduğundan, $2b + r$ de tektir. (2) eşitliğinden dolayı, $2b + r$, x'i böler. x asal olduğundan, $2b + r = x$ olmalı. Bundan ve (2)'den, $2 = r + 1$ çıkar. Yani $r = 1$ ve bu bir çelişkidir. Önermemiz kanıtlanmıştır.

Sekizinci Soru. *Hangi sayılar* ***üç*** *veya daha çok ardışık sayının toplamıdır?*

Sekizinci Sorunun Yanıtı. *Asal olmayan ve 2^n biçiminde yazılamayan her sayı en az üç ardışık sayının toplamıdır.*

Bu savımızı kanıtlamak için altıncı ve yedinci soruların yanıtlarından yararlanacağız.

Eğer x en az üç ardışık sayının toplamıysa, altıncı soruya göre x, 2^n biçiminde yazılamaz ve yedinci sayıya göre x asal olamaz. Şimdi bu önermenin tersini kanıtlayacağız: Eğer x asal değilse ve 2^n biçiminde yazılmıyorsa, x en az üç ardışık sayının toplamıdır.

x'in asal olmadığını ve 2^n biçiminde yazılamayacağını varsayalım. Demek ki öyle bir $k \ge 1$ ve $a \ge 2$ vardır ki,

$$x = (2k + 1)a$$

eşitliği geçerlidir. Eğer $a > k$ ise, altıncı soruda x'in $2k + 1$ tane ardışık sayının toplamı olduğunu gördük. Demek ki bu durumda bir sorun yok. Eğer $a \le k$ ise, gene altıncı soruda x'in $2a$ tane (yani en az 4 tane) ardışık sayının toplamı olduğunu gördük. Bu durumda da bir sorun yok. Hiç sorun kalmadı!